# PTS Vorlesung – Kap 6

## 6 Hypothesentests

Methode

Ziel: Zeige durch ein Experiment, dass eine bestimmte Methode eine Wirkung hat.

Aussagen über die Wirkung haben eine bestimmte Form:

- Der Mittelwert einer neuen Verteilung ist verschieden ($\neq, <, >$) vom Standard-Mittelwert $\mu_0$
- Die Differenz zweier Mittelwerte $\mu_1, \mu_2$ (der Verteilung ohne und mit der Maßnahme) ist verschieden von $0$ ($\neq, <, >$)

Die Standard-Annahme ist:

- Die neue Methode hat keinen Effekt
  (Nullhypothese, null hypothesis)

Wir glauben nur, dass die Methode einen Effekt hat, wenn die Ergebnisse unseres Experiment eine sehr niedrige Wahrscheinlichkeit haben (5%, 1%), sollte die Nullhypothese gelten.

Eine Nullhypothese in Bezug auf den Mittelwert hat die Form

- $\mu = \mu_0$ $\quad (\mu \leq \mu_0, \; \mu \geq \mu_0)$

- $\mu_1 - \mu_0 = 0$ $\quad (\mu_1 \leq \mu_2, \; \mu_1 \geq \mu_2)$

Wenn aus der Nullhypothese folgt, dass das Ergebnis unseres Experiments unwahrscheinlich ist, nehmen wir die Alternativ-Hypothese an.

- $\mu \neq \mu_0$ $\quad (\mu > \mu_0, \; \mu < \mu_0)$

- $\mu_1 - \mu_0 \neq 0$ $\quad (\mu_1 > \mu_2, \; \mu_1 < \mu_2)$

Konkret bedeutet dies:

- Wir legen ein niedriges Wahrscheinlichkeits-Niveau $\alpha$ fest (das Signifikanzniveau, significance level), etwa $\alpha = 5\%$, $\alpha = 1\%$

- Wir nehmen von einer Zufallsvariablen $\mathfrak{X}$ eine unabhängige Stichprobe der Größe $n$ mit Durchschnitt $\bar{x}$ *)

Augenommen:

- Unsere Nullhypothese lautet: der Mittelwert der Verteilung, die wir messen, ist $\mu_0$, symbolisch

$$H_0: \quad \mu = \mu_0$$

- Unsere Messungen von $\mathfrak{X}$ haben den Durchschnitt $\bar{x}$, der sich von $\mu$ unterscheidet um $|\mu_0 - \bar{x}|$

---

* Wir unterscheiden hier zwischen dem Ergebnis einer bestimmten Messung, die zu einer Zahl $\bar{x} \in \mathbb{R}$ führt, und dem allgemeinen Vorgehen zu messen und Durchschnitte zu berechnen, welches wir durch die ZVen $\mathfrak{X}_i$ und $\bar{\mathfrak{X}}$ modellieren.

Also: $H_0: \mu = \mu_0$ und gefunden wurde $|\mu_0 - \bar{x}|$

Wir akzeptieren $H_0$, wenn die Wahrscheinlichkeit $\geq \alpha$ ist, eine Differenz der Größe $|\mu_0 - \bar{x}|$ zu finden, unter der Bedingung, dass der Mittelwert $\mu$ der gegebenen Verteilung gleich $\mu_0$ ist:

$$P\left[\, |\bar{X} - \mu_0| \geq |\bar{x} - \mu_0| \;\middle|\; \mu = \mu_0 \right] \geq \alpha$$

Wir verwerfen $H_0$ und akzeptieren die Alternativ-Hypothese

$$H_a: \ \mu \neq \mu_0$$

falls diese W.keit $< \alpha$ ist,

$$P\left[\, |\bar{X} - \mu_0| \geq |\bar{x} - \mu_0| \;\middle|\; \mu = \mu_0 \right] < \alpha$$

Wenn die ZV $\bar{X}$ normalverteilt ist und wir die Varianz $\sigma^2$ kennen, können wir den Test auf $H_0$ effektiv durchführen

$$P\left[\, |\bar{X} - \mu_0| \geq |\bar{x} - \mu_0| \;\middle|\; \mu = \mu_0 \right]$$

$$= P\left[\sqrt{n}\,\frac{|\bar{X} - \mu_0|}{\sigma} \geq \sqrt{n}\,\frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma} \;\middle|\; \mu = \mu_0 \right]$$

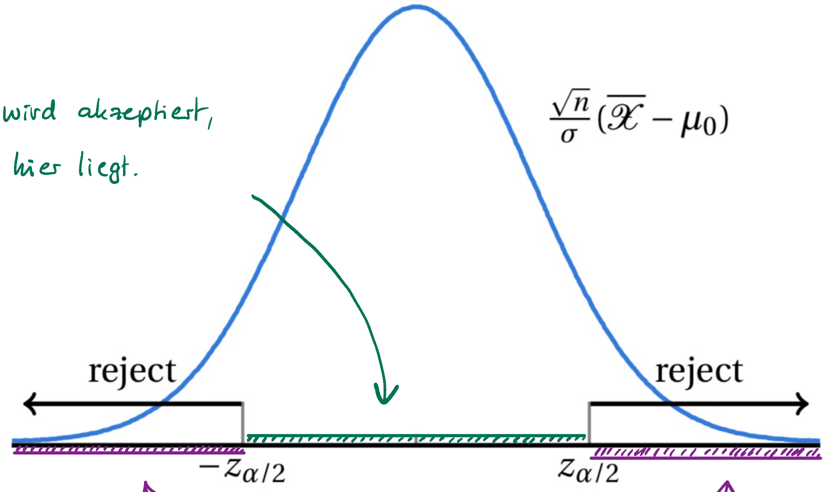
$$= P\left[\, |Z| \geq \sqrt{n}\,\frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma} \;\middle|\; \mu = \mu_0 \right] \geq \alpha$$

Diese Ungleichung gilt genau dann, wenn

$$\sqrt{n}\,\frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma} \leq z_{\alpha/2}$$

Wir nennen $v = \sqrt{n}\,\frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma}$ die Teststatistik für diesen Test

Die Nullhypothese wird akzeptiert,
wenn $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\bar{x}-\mu_0|$ hier liegt.




Die Nullhypothese wird verworfen
wenn $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\bar{x}-\mu_0|$ hier liegt.

**Beispiel 76:** Angenommen die normalverteilte ZV $\mathcal{X}$ hat die Varianz $\sigma^2 = 4$.
Wir wollen testen ob $\mathcal{X}$ den Mittelwert $\mu = 8$ hat (d.h. $\mu_0 = 8$).
Wir nehmen eine Stichprobe der Größe $n = 9$ und erhalten $\bar{x} = 9{,}2$.
Das verlangte Signifikanzniveau ist $\alpha = 0{,}05$ $(= 5\,\%)$.
Der entsprechende z-Wert ist

$$z_{0,025} = 1{,}96$$

Beispiel 76: Angenommen die normalverteilte ZV $X$ hat die Varianz $\sigma^2 = 4$.
Wir wollen testen, ob $X$ den Mittelwert $\mu = 8$ hat (d.h. $\mu_0 = 8$).
Wir nehmen eine Stichprobe der Größe $n = 9$ und erhalten $\bar{x} = 9{,}2$.
Das verlangte Signifikanzniveau ist $\alpha = 0{,}05$ ($= 5\%$).
Der entsprechende z-Wert ist

$$z_{0{,}025} = 1{,}96$$

Wir berechnen die Teststatistik

$$v = \sqrt{n}\,\frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma} = \sqrt{9}\,\frac{|9{,}2 - 8|}{2} = 3 \cdot \frac{1{,}2}{2} = 1{,}8$$

Da $v < z_{0{,}025}$ ist, akzeptieren wir die Nullhypothese

## p-Werte

Angenommen unsere Test-Statistik ist $v = \sqrt{n}\,\frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma}$.

Wir wollen wissen: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis, das mindestens so extrem wie $v$ ist?

Es gilt:

$$p_v := P[\,|Z| \geq v\,] = 2 \cdot P[\,Z \geq v\,]$$

$$= 2 \cdot (1 - P[\,Z \leq v\,]) = 2 \cdot (1 - \Phi(v))$$

Wir nennen diese Wahrscheinlichkeit den p-Wert für unser Experiment.

Wir akzeptieren $H_0$, wenn $p_v \geq \alpha$ ist.

Andernfalls verwerfen wir $H_0$ und akzeptieren die Alternativhypothese $H_a$.

Beispiel 77: In Beispiel 76 haben wir die Test-Statistik $v$ berechnet als

$$v = \sqrt{n} \, \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma} = 1{,}8$$

Der entsprechende p-Wert ist

$$p_v = P[|Z| \geq v]$$

Beispiel 77: In Beispiel 76 haben wir die Test-Statistik $v$ berechnet als

$$v = \sqrt{n} \, \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma} = 1{,}8$$

Der entsprechende p-Wert ist

$$p_v = P[|Z| \geq v]$$

$$= P[\,|Z| \geq 1{,}8\,] = 2 \cdot P[\,Z \geq 1{,}8\,] = 2 \cdot (1 - P[\,Z \leq 1{,}8\,])$$

$$= 2 \cdot (1 - 0{,}964) = 2 \cdot 0{,}036 = 0{,}072$$

Das heißt, die Nullhypothese wird verworfen für jedes Signifikanzniveau

$$\alpha > p_v = 0{,}072 = 7{,}2\,\%$$

## Zweiseitige Tests / Two-sided Tests

Was wir bis jetzt beschrieben haben, ist ein zweiseitiger Test.

Wir verwerfen $H_0$, wenn die W.keit, dass $\bar{X}$ von $\mu_0$ mindestens so weit entfernt ist wie $\bar{x}$ kleiner als $\alpha$ ist.

Dabei schließt „weit entfernt" sowohl Entfernung nach rechts ein wie Entfernung nach links.

Man beachte, dass die Bedingung für die Akzeptanz von $H_0$ äquivalent ist zu

$$\bar{x} \in \left( \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \, , \, \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \right)$$

Der Test heißt „zweiseitig", weil er eine untere und eine obere Schranke einschließt.

Tests, die nur eine obere oder nur eine untere Schranke verlangen, heißen einseitig.

## 6.1 Einseitige Tests

Wenn wir prüfen wollen, ob eine neue Methode zu größeren Werten führt als die frühere (mit Mittelwert $\mu_0$), dann ist unsere Nullhypothese

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 ,$$

das heißt der Mittelwert der neuen Methode ist nicht größer als derjenige der alten Methode.

Gegeben $\alpha$ und der beobachtete Durchschnitt $\bar{x}$, dann verwerfen wir $H_0$, wenn die Wahrscheinlichkeit, einen Durchschnitt $\geq \bar{x}$ zu finden, kleiner als $\alpha$ ist, d.h.

$$P[\, \bar{X} \geq \bar{x} \mid \mu = \mu_0 \,] < \alpha .$$

## Test-Statistik eines einseitigen Tests

Wie können wir überprüfen, dass

$$P[\bar{X} \geq \bar{x} \mid \mu = \mu_0] < \alpha \quad ?$$

Durch Normalisierung erhalten wir

$$P[\bar{X} \geq \bar{x} \mid \mu = \mu_0] = P\left[\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \geq \sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma} \mid \mu = \mu_0\right]$$

$$= P\left[Z \geq \sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma} \mid \mu = \mu_0\right]$$

Der Wert

$$v = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}$$

ist die Test-Statistik dieses einseitigen Tests

## Der p-Wert eines einseitigen Tests

Der p-Wert, der $v$ entspricht, also die W.keit, dass $\bar{X}$ mindestens so extrem ist wie $\bar{x}$, ist

$$p_v = P[Z \geq v] = 1 - \Phi(v)$$

Wie vorher akzeptieren wir die Null-Hypothese, wenn gilt

$$p_v \geq \alpha,$$

was äquivalent ist zu

$$v \leq z_\alpha.$$

Wir verwerfen die Null-Hypothese, wenn gilt

$$p_v < \alpha,$$

was äquivalent ist zu

$$v > z_\alpha$$

Wenn die Null-Hypothese lautet $H_0: \mu \geq \mu_0$

und $\bar{x}$ und $\alpha$ sind wie vorher, dann verwerfen wir $H_0$, falls gilt

$$P[\bar{X} \leq \bar{x} \mid \mu = \mu_0] < \alpha,$$

was äquivalent ist zu

$$P\left[\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \leq \sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma} \;\middle|\; \mu = \mu_0\right]$$

$$= P\left[\quad Z \quad \leq \sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma} \;\middle|\; \mu = \mu_0\right] < \alpha.$$

Wiederum ist $v = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}$ die Test-Statistik.

Der entsprechende p-Wert ist $p_v = P[Z \leq v] = \Phi(v)$

Wir akzeptieren $H_0$, falls $p_v \geq \alpha$ ist (d.h. $-z_\alpha \leq v$).

## 6.2 Hypothesen-Tests mit unbekannter Varianz

Die Theorie ist analog zu der für die bekannte Varianz,

der Unterschied besteht darin, dass anstatt

- der Standard-Normalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ und
- der Varianz $\sigma^2$

wir nun arbeiten mit

- $t_{n-1}$, der t-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden
- dem Schätzer $S^2$

Beispiel 82: Ein Anwohner des Obstmarkts behauptet, dass Studenten im Mittel jeden Abend mindestens 3 Liter Bier trinken.
Um diese Behauptung zu untersuchen, werden 25 zufällig ausgewählte Studenten beobachtet. Die Beobachtung ergibt

- ein Stichproben-Mittel von 2,91 ℓ
- eine Stichproben-Standardabweichung von 0,47 ℓ

Wie können wir die Behauptung verifizieren?

Null-Hypothese: $H_0: \quad \mu \leq \mu_0 = 3\,\ell$

Test-Statistik $\quad v = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\mu_0}{s} = \sqrt{25}\,\frac{2{,}91-3}{0{,}47}$

$$= 5\,\frac{-0{,}09}{0{,}47} = 5\,\frac{-9}{47} = \frac{-45}{47} = -0{,}9574$$

p-Wert: $\quad p_v = P[\,T_{24} \leq -0{,}9574\,] =$

$$P[\,T_2 > 0{,}9574\,] = 0{,}174$$

Die Beobachtung ist konsistent mit der Hypothese.

# Test-Statistiken bei unbekannter Varianz

- Zweiseitiger Test: $v = \sqrt{n}\,\frac{|\bar{x} - \mu_0|}{s}$

  Akzeptanz, falls $v \leq t_{\alpha/2,\, n-1}$

- Einseitiger Test: $v = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x} - \mu_0}{s}$

  Akzeptanz, dass $\mu \leq \mu_0$, falls

  $v \leq t_{\alpha,\, n-1}$

  Akzeptanz, dass $\mu \geq \mu_0$, falls

  $v \geq -t_{\alpha,\, n-1}$