

## Stichproben, Schätzungen, Tests

**Anleitung:** Sie haben bis zum 25. Januar 2022, 23:55 Uhr, Zeit, Ihre Lösung für diese Aufgabe auf OLE einzureichen. Das heißt, Sie haben gut 2 Wochen regulärer Kurszeit. Denken Sie daran, dass Ihre Antworten auf jede Frage in die Endnote einfließen. Daher lohnt es sich, die Aufgabe einzureichen, auch wenn Sie sich nicht in der Lage fühlen, alle Fragen zu beantworten.

- Sie können Ihre Lösungen mit einem Textverarbeitungssystem (Word, Latex) oder per Hand ausarbeiten. Es ist möglicherweise einfacher, wenn Sie Ihre Antworten mit der Hand schreiben, da sie wahrscheinlich symbolische Rechnungen mit Brüchen, Potenzen und Integralen enthalten. Wenn Sie handschriftliche Lösungen einreichen, bemühen Sie sich, deutlich zu schreiben und Ihre Antworten so zu strukturieren und zu kommentieren, dass sie lesbar sind. Wenn Sie mit der Hand schreiben, reichen Sie die Antwort als gescanntes PDF-Dokument ein. (Reichen Sie kein Foto, sondern einen Scan ein, denn Fotos sind in der Regel nur schwer zu lesen).
- Erläutern Sie Ihre Antworten und den Ansatz, mit dem Sie sie erhalten haben. Erläutern Sie insbesondere, welche Regel Sie angewendet haben, wenn Sie ein bestimmtes Resultat der Vorlesung benutzt haben (z.B. „die Varianz einer Summe von unabhängigen Variablen ist die Summe der Varianzen“). Eine Kette von Formeln reicht nicht aus als Antwort.
- Jede Frage hat eine Gewichtung, die in Punkten ausgedrückt wird. Für Ihre Antwort erhalten Sie eine Note auf einer Skala von 0 bis 30. Die Gewichtung bestimmt, wie viel die Note zur Gesamtnote für die Hausarbeiten und damit zur Endnote beiträgt. Beachten Sie, dass wir bei der Berechnung der Endnote für jede Frage das Maximum aus der Note für die Frage und der Prüfungsnote bilden. Es ist daher kein großer Verlust, wenn Sie eine niedrige Note für eine Frage erhalten: (i) die Note für die Frage kann durch die Prüfungsnote ausgeglichen werden, und (ii) sie hat keinen Einfluss auf die Noten für die anderen Fragen.
- Ihre Arbeit soll Ihre eigene Leistung darstellen. Wir erwarten jedoch nicht von Ihnen, dass Sie allein arbeiten. Es ist in Ordnung, die Aufgaben zu besprechen und gemeinsam nach Lösungen zu suchen, aber jeder Student muss seine Lösungen separat aufschreiben und einreichen. Es gehört zum guten akademischen Standard, Mitarbeiter zu erwähnen. Wenn Sie also mit anderen zusammengearbeitet haben, geben Sie bitte deren Namen an.
- Wenn Sie diesen Kurs bereits im letzten Jahr belegt haben, müssen Sie nicht die gleichen Antworten wie im letzten Jahr einreichen, um Punkte zu erhalten. Reichen Sie nur dann Antworten auf eine Frage ein, wenn sie sich von den Antworten des letzten Jahres unterscheiden. Bei anderen Fragen geben Sie einfach an, dass Sie die gleiche Note wie im Vorjahr erhalten möchten. Das erspart uns die wiederholte Benotung der gleichen Arbeit.

### 1 Laufzeit von Kopfhörern

Die Laufzeit eines bestimmten Typs von Bluetooth-Kopfhörern hat einen Erwartungswert von 25 Stunden und eine Standardabweichung von 4 Stunden. Approximieren sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Stichprobe (*sample*) von  $n$  solcher Kopfhörer ein Stichprobenmittel (*sample mean*) von mehr als 26,25 Stunden hat, wenn gilt

1.  $n = 36$ ;
2.  $n = 49$ ;
3.  $n = 64$ .

(Gewicht: 16% dieser Arbeit)

### 2 Nikotin in Zigaretten

Eine Stichprobe von 20 Zigaretten wird auf ihren Nikotingehalt hin untersucht, wobei ein Durchschnittswert von 1,2 mg festgestellt wird.

1. Berechnen Sie ein zweiseitiges 99%-Konfidenzintervall für den mittleren Nikotingehalt einer Zigarette, wenn bekannt ist, dass die Standardabweichung des Nikotingehalts einer Zigarette  $\sigma = 0,2$  mg beträgt.
2. Nehmen wir an, dass die Varianz der Grundgesamtheit (*population variance*) vor dem Experiment nicht bekannt ist, nehmen wir weiter an, dass die Stichprobenvarianz (*sample variance*) 0,04 ist. Was sind dann die Grenzen eines zweiseitigen 99%-Konfidenzintervalls für den mittleren Nikotingehalt?
3. Berechnen Sie unter den Annahmen von Teil 2 einen Wert  $c$ , für den man „mit 99% Konfidenz“ behaupten kann, dass  $c$  größer ist als der mittlere Nikotingehalt einer Zigarette. Wählen Sie den Wert  $c$  so klein wie möglich.

(Gewicht: 20% dieser Arbeit)

### 3 Schulden auf Kreditkartenkonten

Eine zufällige Stichprobe von 300 Kreditkartenkonten ergab eine durchschnittliche Schuld (*debt*) von 6.120 EUR mit einer Standardabweichung von 4.200 EUR.

1. Schätzen Sie die durchschnittliche Schuld eines Kontos, indem Sie ein 95%-Konfidenzintervall konstruieren.
2. Ermitteln Sie den kleinsten Wert  $c$ , der „mit 90% Sicherheit“ (*confidence*) größer ist als die durchschnittliche Schuld pro Karteninhaber. Wählen Sie den Wert  $c$  so klein wie möglich.

(Gewicht: 20% dieser Arbeit)

#### 4 Gewicht von Beryllium

Die Menge an Beryllium in einer Substanz wird häufig durch eine photometrische Filtrationsmethode bestimmt. Wenn das Gewicht des Berylliums  $\mu$  ist, dann ist der mit dieser Methode ermittelte Wert normalverteilt mit Mittelwert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma$ . Insgesamt acht unabhängige Messungen von 3,180 mg Beryllium ergaben die folgenden Ergebnisse:

3,166, 3,192, 3,175, 3,180, 3,182, 3,171, 3,184, 3,177.

Verwenden Sie diese Daten, um

1.  $\mu$  zu schätzen,
2. ein 99%-Konfidenzintervall für  $\mu$  zu finden.

(Gewicht: 16% dieser Arbeit)

#### 5 Zufällige Mäuse

Eine Kolonie von Labormäusen besteht aus mehreren tausend Mäusen. Das Durchschnittsgewicht aller Mäuse beträgt 32 Gramm mit einer Standardabweichung von 4 Gramm. Ein Assistent wurde von einem Wissenschaftler beauftragt, 25 Mäuse für ein Experiment auszuwählen.

Vor der Durchführung des Experiments entschied sich der Wissenschaftler jedoch, die Mäuse zu wiegen, um festzustellen, ob es sich bei der Auswahl des Assistenten um eine Zufallsstichprobe handelte oder ob sie mit einem unbewussten Bias getroffen wurde (vielleicht wurden die Mäuse ausgewählt, die am langsamsten wegliefen, was auf eine gewisse Schwäche dieser Gruppe hindeuten könnte).

- Wenn der Stichprobenmittelwert der 25 Mäuse 30,4 beträgt, wäre dies bei einem Signifikanzniveau von 5% ein signifikanter Beleg gegen die Hypothese, dass die Auswahl eine Zufallsstichprobe darstellt?

(Gewicht: 12% dieser Arbeit)

#### 6 Messung des pH-Werts

In einem bestimmten chemischen Prozess ist es wichtig, dass eine gewisse Lösung, die als Reaktant verwendet werden soll, einen pH-Wert von genau 8,20 hat. Eine Methode zur Bestimmung des pH-Werts, die für Lösungen dieser Art verwendet wird, liefert bekanntermaßen normalverteilte Messwerte mit einem Mittelwert, der dem tatsächlichen pH-Wert entspricht, mit einer Standardabweichung von 0,02. Angenommen, 10 unabhängige Messungen ergaben die folgenden pH-Werte:

8,18, 8,17, 8,16, 8,15, 8,17, 8,21, 8,22, 8,16, 8,19, 8,18.

1. Welche Schlussfolgerung lässt sich bei einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 10\%$  ziehen?

2. Und welche bei einem Niveau von  $\alpha = 5\%$ ?
3. Was ist der p-Wert des Tests?

(Gewicht: 16% dieser Arbeit)