PTS Vorlesung – Kap 5

5 Schätzen von Parametern (Parameter Estimation)

Wir beobachten unabhängige identisch verteilte (i.i.d.) ZVen $X_1, X_2, \ldots$ und schätzen

$$\mu \quad \text{und} \quad \sigma^2$$

Unverzerrte Schätzer (unbiased Estimators) sind

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

Wie gut sind die Schätzungen, die wir damit erhalten?

5.1 Intervall-Schätzungen

Unsere Schätzungen haben die Form von Intervallen (a,b), so dass

$$\mu \in (a,b) \quad \text{oder} \quad \sigma^2 \in (a,b)$$

gilt mit einem „hohen Grad an Vertrauen." *)

Annahme: $X_1, X_2, \ldots$ sind $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt (u.i.v.)

(Manchmal geht es auch ohne diese Annahme auf Grund des zentralen Grenzwertsatz (CLT))

---

* Allerdings nicht mit einem hohen Grad an Wahrscheinlichkeit, denn μ und σ sind gegeben; wir kennen sie nur nicht

Mögliche Fälle:

- σ^2 ist bekannt, μ ist unbekannt
- σ^2 und μ sind beide unbekannt
- σ^2 ist unbekannt (μ ist nicht von Interesse)

Intervalltypen:

- zweiseitige Intervalle two-sided intervals (a,b)
- nach unten offene einseitige Intervalle $(-\infty, b)$ lower intervals
- nach oben offene zweiseitige Intervalle (a, ∞) upper intervals

5.2 Schätzung zweiseitiger Intervalle

Angenommen, wir wollen 95% Vertrauen haben, dass $\mu \in (a,b)$. Wie müssen wir a, b wählen?

Anwendungsfall 1: Angenommen, $x_1, x_2, \dots, x_n$ sind Werte für $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n$. Wie gut ist der Durchschnitt

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

als Schätzung für den Mittelwert $E[\mathcal{X}_1]$?

Idee: Wähle Funktionen $a(x)$, $b(x)$ mit entsprechenden ZVen $\mathcal{A} = a(\mathcal{X})$, $\mathcal{B} = b(\mathcal{X})$, so dass

$$P[\mathcal{A} \leq \mu \leq \mathcal{B}] = 95\%$$

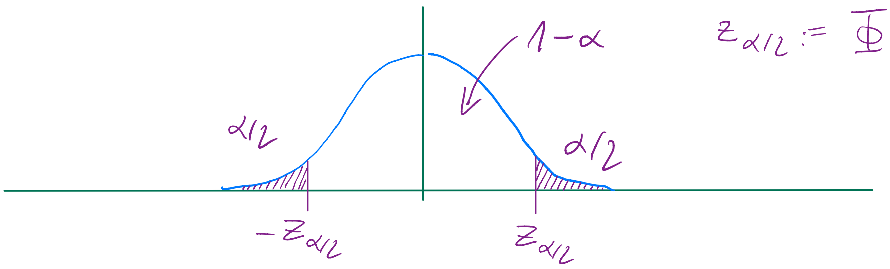
Terminologie: $5\% = (100-95)\%$ ist das Konfidenz-Niveau (confidence level)

Wie wählen wir a, b?

Wie kann man a, b wählen, so dass gilt

$$P[a \leq Z \leq b] = 1 - \alpha \qquad , \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Einfach!



$$z_{\alpha/2} := \Phi^{-1}\left(1 - \alpha/2\right)$$

Wähle $a = -z_{\alpha/2}$, $\quad b = z_{\alpha/2}$

α ist das Konfidenz-Niveau (confidence level)

Im Allgemeinen sei

$$z_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha)$$

Nächster Schritt: $X \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$, aber μ sei unbekannt

$$\Rightarrow \quad X - \mu \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\Rightarrow \quad \mu - X \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\Rightarrow \quad 1-\alpha = P[-z_{\alpha/2} \leq \mu - X \leq z_{\alpha/2}]$$

$$= P[\underbrace{X - z_{\alpha/2}}_{a(X)} \leq \mu \leq \underbrace{X + z_{\alpha/2}}_{b(X)}]$$

Beachte: Die Intervallgrenzen sind ZVen, nicht der Mittelwert μ

Letzter Schritt: Seien $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$

$$\Rightarrow \quad \bar{X} - \mu \sim \mathcal{N}(0, \tfrac{1}{n}\sigma^2)$$

$$\Rightarrow \quad \mu - X \sim \mathcal{N}(0, \tfrac{1}{n}\sigma^2)$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{n}\,\frac{\mu - X}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\Rightarrow \quad 1-\alpha = P[-z_{\alpha/2} \leq \sqrt{n}\,\frac{\mu - \bar{X}}{\sigma} \leq z_{\alpha/2}]$$

$$= P[-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \leq \mu - \bar{X} \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}]$$

$$= P[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

Satz: Sei $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$. Seien

$$a(x) = x - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}$$

$$b(x) = x + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}$$

Dann gilt

$$P[a(\bar{X}) \leq \mu \leq b(\bar{X})] = 1-\alpha$$

Wir sagen: $(a(\bar{x}), b(\bar{x}))$ ist ein $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$-iges Konfidenzintervall für den Mittelwert μ, für gegebenes $\bar{x}$

5.3 Schätzung von einseitigen Intervallen

Satz: Sei $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$ und seien

$$a(x) = x - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha}$$

$$b(x) = x + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha}$$

Dann gilt

$$P[a(\bar{X}) \leq \mu] = 1-\alpha$$

$$P[\mu \leq b(\bar{X})] = 1-\alpha$$

$(a(\bar{x}), \infty)$ und $(-\infty, b(\bar{x}))$ sind einseitige nach oben bzw. nach unten offene Konfidenzintervalle.

5.4 Festlegung der Intervall-Länge (Fixing the Interval Length)

Angenommen wir wollen ein Intervall $(a(\bar{x}), b(\bar{x}))$ haben

- mit Konfidenz-Niveau (confidence level) α
- der Länge höchstens L

Wie viele Messungen brauchen wir?

- Die Länge von $(a(\bar{x}), b(\bar{x}))$ ist

$$b(\bar{x}) - a(\bar{x}) = \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} - \left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$$

$$= 2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}$$

- Also gilt: $b(\bar{x}) - a(\bar{x}) \leq L \iff 2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \leq L$

$$\iff \sqrt{n} \geq 2 \frac{\sigma}{L} z_{\alpha/2} \iff n \geq \left(2 \frac{\sigma}{L} z_{\alpha/2}\right)^2$$

5.5 Wo brauchen wir die Normalverteilung?

Wir haben nur verwendet, dass

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{1}{n} \sigma^2\right)$$

Wegen des zentralen Grenzwertsatzes gilt dies auch für Durchschnitte von beliebigen ZVen.

Faustregel: Für $n \geq 30$ können wir annehmen, dass $\bar{X}$ normalverteilt ist.

Beispiel: Ein Hersteller von Autoreifen behauptet, dass die durchschnittliche Lebensdauer eines Reifens mindestens 60.000 km beträgt.

Zur Überprüfung werden 25 Reifen getestet. Das Ergebnis ist:

- das Stichprobenmittel ist $\bar{x} = 54.000$ km
- die Standardabweichung der Stichprobe ist $S = 12.000$ km.

Angenommen, die Standardabweichung der Stichprobe ist gleich der Standardabweichung der Grundgesamtheit (population).

Finde das Konfidenzintervall für das 5%-Niveau!

Wir haben: $\bar{x} = 54.000$, $\sigma = 12.000$, $n = 25$, $\alpha = 0{,}05$

$$\Rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = \Phi(0{,}975) = 1{,}96$$

Das Intervall ist

$$(a, b) = \left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2},\ \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$$

$$= \left(54.000 - \frac{12000}{5} \cdot 1{,}96,\ 54.000 + \frac{12000}{5} \cdot 1.96\right)$$

$$\approx (54.000 - 2.400 \cdot 2,\ 54.000 + 2400 \cdot 2)$$

$$= (49.200,\ 58.800)$$