

10 Schätzung und Konfidenzintervalle

10.1 Wahrscheinlichkeitsabschätzung auf der Grundlage von Parameterschätzungen

Ein Hersteller von Wärmetauschern (engl. *heat exchangers*) verlangt, dass die Plattenabstände seiner Wärmetauscher zwischen 0,240 und 0,260 cm liegen. Ein Ingenieur der Qualitätskontrolle nimmt eine Stichprobe von 20 Wärmetauschern und misst den Abstand der Platten an jedem Wärmetauscher. Er findet heraus, dass der Stichprobenmittelwert (engl. *sample mean*) und die Stichprobenstandardabweichung (engl. *sample standard deviation*) dieser 20 Messungen 0,254 cm und 0,005 cm betragen.

Schätzen Sie den Anteil aller Tauscher, deren Plattenabstände außerhalb des angegebenen Bereichs liegen. Nehmen Sie an, dass die Plattenabstände normalverteilt sind.

Hinweis: Nehmen Sie den Stichprobenmittelwert und die Stichprobenstandardabweichung als Schätzwerte an für den realen Mittelwert und den Mittelwert und leiten Sie einen Schätzwert ab.

10.2 Konfidenzintervalle bei Messfehlern

Ein Ingenieur nimmt Messungen an Werkstücken vor. Die Werte, die sein Messgerät liefert, haben einen Fehler, der normalverteilt ist mit Mittelwert 0 und Standardabweichung 0,2. Der Ingenieur misst das Werkstück 5 Mal und das Gerät liefert die Werte

3,152, 3,139, 3,162, 3,147, 3,144.

- Bestimmen Sie das 95%- und das 99%-Konfidenzintervall für die tatsächliche Größe.

Hinweis: Verwenden Sie R, um den Stichprobenmittelwert zu berechnen:

1. Definieren Sie einen Vektor mit den Messwerten:

```
MEAS = c(3.152, 3.139, 3.162, 3.147, 3.144)
```

Die Funktion `c(.)` wird als “concatenate” gelesen und verkettet die Eingabe zu einem Vektor.

2. Ermitteln Sie den Stichprobenmittelwert des Vektors mit Hilfer der Funktion `mean(.)`:

```
smean = mean(MEAS)
```

10.3 Länge von Weizenpflanzen

Ausgewachsene Weizenpflanzen der Sorte Rusticus sind im Mittel 102,5 cm lang, mit einer Standardabweichung von 7 cm. Die Länge sei normalverteilt. Durch Umwelteinflüsse ändert sich die mittlere Halmlänge, die Standardabweichung aber nicht.

Agrarwissenschaftler untersuchen auf einem Acker zehn ausgewachsene Weizenpflanzen dieser Sorte. Sie messen die folgenden Längen in cm:

| | | | | |
|-------|-------|-------|--------|--------|
| 96,62 | 94,91 | 85,05 | 101,61 | 109,55 |
| 93,05 | 97,86 | 96,66 | 95,08 | 98,87. |

Das arithmetische Mittel der Messungen ist also

$$\bar{x} = 96,93.$$

Es soll untersucht werden, ob die Umwelteinflüsse auf dem Acker die Länge der Pflanzen beeinflusst haben:

1. Bestimmen Sie die zweiseitigen Konfidenzintervalle zu den Konfidenzniveaus 95% und 99%.

Bei unserer Stichprobe ist der Absolutbetrag der Differenz zwischen dem Mittelwert der Stichprobe $\bar{x} = 96,93$ (engl. *sample mean*) und dem Mittelwert der Grundgesamtheit $\mu = 102,5$ (engl. *population mean*) gleich

$$|\bar{x} - \mu| = |96,93 - 102,5| = 5,57.$$

2. Wie wahrscheinlich ist es, dass der Mittelwert einer Stichprobe wie oben einen Abstand von $|\bar{x} - \mu| = 5,57$ cm oder mehr zum Mittelwert der Grundgesamtheit hat?

Hinweis: Sicherlich sind für die Beantwortung der Frage der Mittelwert und die Standardabweichung der Grundgesamtheit wichtig. Überlegen Sie, welche andere Information, über den Mittelwert hinaus, relevant ist für die Beantwortung dieser Frage.

Die Agrarwissenschaftler wollen nun insbesondere wissen, ob die Umwelteinflüsse die Länge der Halme *verringert* haben.

3. Bestimmen Sie die nach unten offenen einseitigen Konfidenzintervalle zu den Konfidenzniveaus 95% und 99%.
4. Wie wahrscheinlich ist es, dass der der Mittelwert μ der Grundgesamtheit und der Mittelwert einer Stichprobe wie oben eine Differenz von mindestens $\mu - \bar{x} = 5,57$ haben?