

9 Normalverteilung und zentraler Grenzwertsatz

Lösen Sie diese Aufgaben zunächst, indem Sie, wo es möglich ist, die gefragten Werte mit einer Tabelle für die Normalverteilung berechnen. (Sie finden so eine Tabelle auf OLE.) Haben Sie das gemacht, verwenden Sie RStudio, um Ihre Ergebnisse zu kontrollieren.

9.1 Schneefall in Bozen

Angenommen, die jährliche Schneefallmenge in Bozen ist normalverteilt mit einem Mittelwert von 29 cm und einer Standardabweichung von 3,6 cm (zur Erinnerung, die Standardabweichung ist die Quadratwurzel der Varianz).

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es im nächsten Jahr mehr als 33 cm Schnee geben wird?
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den nächsten zwei Jahren mindestens 66 cm Schnee fallen werden?
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den nächsten drei Jahren mindestens 99 cm Schnee fallen werden?

Haben Sie für Ihre Antwort auf die letzten beiden Fragen zusätzliche Annahmen getroffen?

9.2 Summe der Würfelpunkte

Sie werfen 50 faire Würfel und summieren die Zahl der Punkte. Wie man leicht sieht, ist die Summe eine Zahl zwischen 50 und 300.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der erzielten Punkte zwischen 150 und 200 liegt, d.h. im Intervall $[150, 200]$?

9.3 Wirksamkeit eines Medikaments

Die Erfahrungen mit einem Medikament zeigen, dass es im Durchschnitt bei 50% der Männer und 75% der Frauen wirksam ist.

Für eine Studie wendet eine Klinik das Medikament bei ihren Patienten an. An der Studie nehmen 25 Männer und 35 Frauen teil. Die Studie wird so organisiert, dass die Ergebnisse aller Teilnehmer unabhängig voneinander sind.

Die Studienleiter wollen herausfinden, wie wahrscheinlich die möglichen Ergebnisse der Studie auf Grund der Erfahrungswerte sind. Es sei \mathcal{X} die Anzahl der Teilnehmer, bei denen das Medikament wirksam ist und es seien \mathcal{X}_M und \mathcal{X}_W die Anzahl der männlichen beziehungsweise weiblichen Teilnehmer, bei denen das Medikament wirkt. Die Studienleiter betrachten \mathcal{X} , \mathcal{X}_M und \mathcal{X}_W als Zufallsvariablen.

1. Was können Sie über die jeweilige Verteilung von \mathcal{X}_M und \mathcal{X}_W sagen? Handelt es sich um einen bekannten Typ? Wenn ja, was sind die Parameter?
2. Wie wahrscheinlich ist es, dass das Medikament bei weniger als 10 oder mehr als 15 Männern wirkt?
3. Was können Sie über die Verteilung von \mathcal{X} sagen?
4. Würde sich Ihre Antwort ändern, wenn die Anzahl der teilnehmenden Männer und Frauen gleich wäre? Oder wenn die Prozentzahlen, mit denen das Medikament wirkt, bei Männern und Frauen gleich wäre?
5. Wie hängt \mathcal{X} ab von \mathcal{X}_M und \mathcal{X}_W ? Verwenden Sie die Informationen aus der Vorlesung für eine Approximation der Wahrscheinlichkeit, dass das Medikament bei mindestens 35 Patienten wirkt.

9.4 Genauigkeit von astronomischen Messungen

Ein Astronom möchte die Entfernung eines Sterns von der Erde messen. Aufgrund atmosphärischer Störungen wird jedoch jede Messung einen gewissen Fehler enthalten. Daher entscheidet sich der Astronom, eine Reihe von Messungen vorzunehmen und dann den Durchschnittswert als Schätzung der tatsächlichen Entfernung zu verwenden, die er als d bezeichnet.

Der Astronom nimmt an, dass die Messungen unabhängige Zufallsvariablen mit einem Mittelwert von d Lichtjahren und einer Standardabweichung von 2 Lichtjahren sind.

- Wie viele Messungen muss er durchführen, um mit mindestens 95-prozentiger Sicherheit sagen zu können, dass seine Schätzung bis auf $\pm 0,5$ Lichtjahre genau ist?