Poisson distribution (based on the exp. distribution):

$Y \sim Exp(\lambda)$ e.g. waiting time

λ rate: avg # of events per time unit

$Y_1, Y_2, \dots$ copies of

$X :=$ # of subsequent events of the Y_i,

i.e. the max k such that

$$\sum_{i=1}^{k} Y_i \le 1$$

$$P[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Prob. mass fct. (pmf) (Zähldichte) of X

Applications:

- $P[X = k]$? $P[X \le k]$?

Variants:

① Unit Time of length a

$$X = \underset{k}{\operatorname{argmax}} \left(\sum_{i=1}^{k} Y_i \le a \right), \quad a > 0$$

$a = 2$ hrs, $\frac{1}{2}$ hr, ...

New unit time: length a, instead of 1

Instead of $Y \sim Exp(\lambda)$, look at $Y' \sim Exp(a\lambda)$

let X' be the corresponding Poisson RV:

$$X' \sim Pois(a\lambda)$$

(2) <u>Two kinds of events:</u>

- bar w/ male, fem. customers

$Y \sim Exp(\lambda)$ $\qquad$ $U \sim Exp(\mu)$, Y, U indep.

Corresponding Poisson RVs

$X \sim Pois(\lambda)$ $\qquad$ $Z \sim Pois(\mu)$

Count both male and femal customers:

New waiting time:

$$M := \min(Y, U) \xrightarrow[\text{Lek}]{\text{lecture}} M \sim (\lambda + \mu)$$

N corresponding Poisson $\quad N \sim Pois(\lambda + \mu)$

(3) <u>Divide events into two parts:</u>

- Customers arrive at bar, $Exp(\lambda)$, λ per hour
- fraction p of customers is female
  $(1-p)$ is male

Assume: arrival of male and female customers is independent of each other

Arrival rate of female customers: $\quad p\lambda$
(male — " — : $\quad (1-p)\lambda$)

Let X the count of female customers:

$X \sim Pois(p\lambda)$

Thinning of a process,
look at subset of events

Klassen von Poisson-verteilten Ereignissen (Ausdünnung/Thinning)

Ein Geschäft habe im Durchschnitt λ Kunden pro Stunde.
Angenommen, der Anteil der weiblichen Kunden ist p, $0 \le p \le 1$, und der Anteil der männlichen Kunden ist $(1-p)$.

Außerdem sei die Ankunft weiblicher Kunden unabhängig von der Ankunft männlicher Kunden.

Wie ist die Zahl der weiblichen Kunden pro Stunde verteilt?

Beispiel: Tom erhält während eines Arbeitstages im Schnitt 3 Emails pro Stunde. Ein Drittel davon sind an ihn persönlich gerichtet, zwei Drittel gehen an Listen.
Wir nehmen an, die Ankunft der Emails ist unabhängig voneinander. Die Ankunft von persönlichen Emails ist unabhängig von der Ankunft der Listen-Emails.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Tom mehr als 2 persönliche Emails in 2 Stunden erhält?

X RV, counting pers. emails within 2 hours

pers. emails per hour : $\text{Pois}\left(\frac{1}{3}\cdot 3\right) = \text{Pois}(1)$

——— ——— 2 hours: $\text{Pois}\left(2\cdot\frac{1}{3}\cdot 3\right) = \text{Pois}(2)$

1- ppois(2,2) , ppois(2,2, lower.Tail = FALSE)

Beispiel:

In einer Stadt gibt es pro Jahr 1000 Einsätze von Notärzten.
Ein Einsatz dauert ca. 2 Stunden.
Die Häufigkeit der Einsätze ist unabhängig von der Tageszeit und Jahreszeit.
Die Stadt möchte sicherstellen, dass mit W.keit $\geq 99{,}9\,\%$ immer ein Notarzt verfügbar ist.
Wie viele Ärzte müssen zu jedem Zeitpunkt in Bereitschaft sein?

Time to deal w/ emergency = 2 hrs

$\lambda =$ # emergencies / 2 hrs

$$= \frac{1000}{\underbrace{365 \cdot \frac{24}{2}}_{\text{\# 2-hr periods/yr}}} = 0.23$$

$W =$ # em. / 2hr period

$W \sim \mathrm{Pois}(0.23)$

$n =$ # people in city

$p =$ prob. of a person to cause an emergency

$\Rightarrow n \cdot p =$ expected value of #emergencies

$\lambda = n \cdot p$

$B(n, p) \sim \mathrm{Pois}(\lambda) = \mathrm{Pois}(n \cdot p)$

k doctors on duty

1 doctor $\Rightarrow$ not more than $k-1$ emergencies

Want

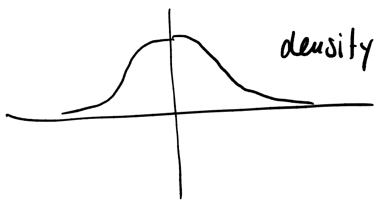
$$P[N \le k-1] \ge 0.999$$

increasing k, increases $P[N \le k-1]$, $k \ge 1$

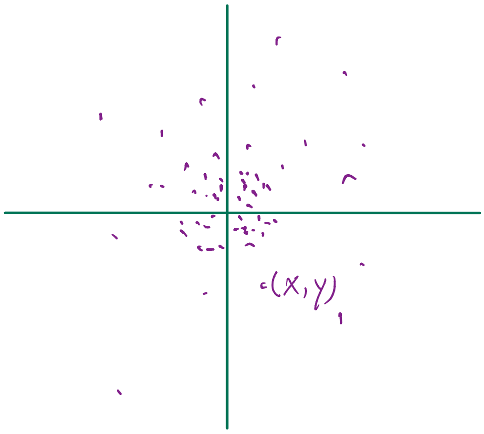
$$\text{ppois}(k-1, 0.23)$$

The ==normal distribution== has a density (bell curve)

Parameters μ, σ^2

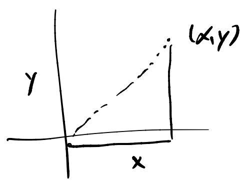


$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



let $d(x,y)$ be the joint density of X, Y

- $d(x,y)$ depends on the distance of (x,y) from $(0,0)$ (not on the angle)
- X, Y independent



$\Rightarrow$

- $d(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

  $= f_X(\sqrt{x^2}) \cdot f_Y(\sqrt{y^2})$

- $d(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$ $\quad g(\sqrt{\cdot}\ )$

  $= f_X(\sqrt{x^2}) \cdot f_Y(\sqrt{y^2})$ $\quad f_X(\sqrt{\ }\ ),\ f_Y(\sqrt{\ }\ )$

- $f_X = f_Y =: f$ $\Big)$ $= f(\sqrt{x^2}) \cdot f(\sqrt{y^2})$

$$f(x)\cdot f(0) = f_X(x)\cdot f_Y(0) = g\left(\sqrt{x^2+0^2}\right) = g\left(\sqrt{x^2}\right) = g(x) \quad , \quad x \geq 0$$

$$f(x)\cdot f(0) = g(x)$$

$$\Rightarrow \qquad g(x) = K\, f(x) , \qquad K = f(0)$$

$$f(x) = \frac{1}{K}\, g(x)$$

. . . .

$$h(u) = \frac{1}{K^2}\, g(\sqrt{u})$$

. . . . . $\Leftrightarrow \quad h(u+v) = h(u)\cdot h(v)$