

8 Spezielle Verteilungen

8.1 Eine binomische Zufallsvariable

Sei \mathcal{X} eine binomialverteilte Zufallsvariable mit $E[\mathcal{X}] = 9$ und $Var(\mathcal{X}) = 2.25$. Bestimmen Sie:

1. $P[\mathcal{X} = 7]$
2. $P[\mathcal{X} > 13]$.

8.2 In der Lotterie gewinnen

Wenn Sie für 40 verschiedene Lotterien je ein Lotterielos kaufen und bei jeder dieser Lotterien eine Gewinnchance von $1/100$ haben, wie hoch ist dann die ungefähre Wahrscheinlichkeit, dass Sie gewinnen bei

1. mindestens einer Lotterie,
2. genau einer Lotterie, oder
3. mindestens zwei Lotterien?

Hinweise: Um welche Art von Verteilung handelt es sich? Denken Sie daran, dass Sie entweder die Wahrscheinlichkeit für die Verteilung berechnen können, die das Beispiel exakt modelliert, oder dass Sie diese Verteilung durch eine andere annähern können. Als dritte Möglichkeit können Sie RStudio auf Ihrem Computer installieren und die genaue Wahrscheinlichkeit berechnen.

8.3 Verkaufte Hamburger

Ein Restaurant verkauft im Durchschnitt 120 Hamburger pro Woche. Schätzen Sie

1. den Anteil der Wochen, in denen höchstens 100 Hamburger verkauft wurden,
2. den Anteil der Wochen, in denen mindestens 130 Hamburger verkauft wurden,

3. den Anteil der Monate (gerechnet als Zeitraum von 4 Wochen), in denen mindestens 520 Hamburger verkauft wurden.

Teilfragen 2 und 3 sind strukturell gleich. Der Zeitraum hat sich um 4 Wochen verlängert, aber die Zahl der Hamburger, nach denen wir fragen, auch. Werden sich die Wahrscheinlichkeiten unterscheiden? Erläutern Sie Ihre Ansicht: wenn ja, warum? wenn nein, warum nicht?

Unabhängig von den Hamburgern verkauft das Restaurant auch Pizzen, und zwar im Durchschnitt ebenfalls 120 pro Woche.

4. Schätzen Sie den Anteil der Wochen, in denen zusammen höchstens 200 Pizzen und Hamburger verkauft wurden.

Hinweise: Um welche Art von Verteilung handelt es sich jeweils? Geben Sie als Antwort zu jeder Frage

- zunächst einen algebraischen Ausdruck
- dann ein numerisches Resultat, das Sie mit R erhalten haben.

Erklären Sie, welche Annahmen jedem Schritt zu Grunde liegen.

8.4 Rosinenbrötchen

In einer Großbäckerei werden Rosinenbrötchen gebacken. Dazu werden 100 kg Teig mit Rosinen hergestellt. Für ein Brötchen braucht man jeweils 50g davon. Die Bäckerei möchte, dass jedes Brötchen im Durchschnitt 5 Rosinen enthält und gibt dem Teig 10.000 Rosinen bei. Der Teig wird gut durchmischt und wir können daher annehmen,

- dass es für jede Rosine und jedes Brötchen gleich wahrscheinlich ist, dass die Rosine im Brötchen landet, und
- dass das Brötchen, in dem die eine Rosine landet, unabhängig davon ist, in welchem Brötchen eine andere Rosine landet.

Sie kaufen eines dieser Brötchen in einem Geschäft der Bäckerei.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Brötchen keine Rosine enthält?
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Brötchen höchstens eine Rosine enthält?
3. Wie viele Rosinen muss man dem Teig begeben, damit 99% der produzierten Brötchen mindestens 3 Rosinen enthalten?

Hinweis: Mit welcher Verteilung kann man die Wahrscheinlichkeit modellieren, dass ein Brötchen k Rosinen enthält? Versuchen Sie zunächst das Problem allgemein zu lösen, für r Rosinen im Teig und N Brötchen.

4. Visualisieren Sie die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten

$$P[\# \text{ Rosinen im Brötchen} = k]$$

in Desmos (benutzen Sie dazu eine der für den Kurs vorbereiteten Visualisierungen, die auf OLE verlinkt sind).

Hinweis: Welche der Verteilungen auf OLE ist dazu geeignet?

5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Brötchen der ganzen Produktion keine Rosine enthält? Können Sie die Wahrscheinlichkeit genau berechnen oder nur näherungsweise?

Bemerkung: Die Logik hinter dieser Übung ist nicht nur für das Backwesen von Bedeutung. Auf die gleiche Art, wie wir über Brötchen und Rosinen nachdenken, können wir dies auch tun für Kunden eines Cloud-Providers (als Brötchen) und Rechner-Ausfälle (als Rosinen) und uns fragen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass der Kunde von k Ausfällen betroffen ist. Wir können damit auch analysieren, wie in der Vorlesung, wie wahrscheinlich k medizinische Notfälle (die Rosinen) während einer Stunde (pro Brötchen) sind.