20. Unfälle auf der Autobahn

Angenommen, im Durchschnitt gibt es pro Woche 5 Unfälle auf der Autobahn zwischen Trient und Bozen.

werner.nutt@gmail.com (not shared) Switch account

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in einer Woche mindestens einen Unfall gibt?

- 1/5
- e^{-5}
- 1 - e^{-5}
- e^{1/5} - 1
- e^{-5} 5^1/1!

$\mathcal{U}$ = # accidents (in a given week)

$$P[\mathcal{U} \geq 1] = 1 - P[\mathcal{U} < 1] = 1 - P[\mathcal{U} = 0]$$

Frequency $\lambda = 5$

$$P[\mathcal{U} = 0] = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = \frac{1}{1} e^{-5} = e^{-5}$$

$$P[\mathcal{U} > 0] = 1 - e^{-5}$$

More generally:

$$P[m \leq \mathcal{U} \leq n] = \sum_{k=m}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$P[m \leq \mathcal{U}] = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Beispiel 56: Angenommen, im Durchschnitt gibt es pro Woche fünf Unfälle auf der Autobahn zwischen Trient und Bozen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es diese Woche mindestens einen Unfall gibt?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es diese Woche mindestens fünf Unfälle gibt?

$\lambda = 5$

$$P[\mathcal{U} \geq 5] = \sum_{k=5}^{\infty} \frac{5^k}{k!} e^{-5} = P[\mathcal{U} > 4]$$

Bemerkung:

$$P[\mathcal{U} \geq 0] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k!} e^{-5}$$

$$= e^{-5} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k!} = e^{-5} \exp(5) = e^{-5} e^5$$

$$= e^0 = 1$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es während zwei Wochen mindestens acht Unfälle gibt?

Modellierung

- neue Zeiteinheit : 2 Wochen statt 1 W.
- neue Rate : $2 \cdot 5 = 10 / 2$ Wochen

–

$P[U_1 + U_2 \geq 8]$ $\quad U_1, U_2 \sim Pois(5)$

$\Rightarrow U_1 + U_2 \sim Pois(5+5)$

$U = U_1 + U_2 \quad U \sim Pois(10)$

$P[U \geq 8] = P[U > 7]$

$= 1 - P[U \leq 7]$

$X \sim Exp(\lambda)$

$\Rightarrow E[X] = \frac{1}{\lambda}$ $\qquad \Rightarrow Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

$\sigma_X = \frac{1}{\lambda}$

$Y \sim Pois(\lambda)$

$\Rightarrow E[Y] = \lambda$ $\qquad \Rightarrow Var(Y) = \lambda$

$\sigma_X = \sqrt{\lambda}$

Expected Values

$X \sim Pois(\lambda)$ $\qquad E[X] = \lambda$

$Y \sim Binom(n,p)$ $\qquad E[Y] = n \cdot p$

Compare X, Y with $\lambda = n \cdot p$

$X \sim Binom(n,p)$ $\qquad \lambda = n \cdot p$

$$P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \Rightarrow p = \frac{\lambda}{n}$$

$$= \frac{n!}{k!\,\cancel{(n-k)!}} \left(\frac{\lambda}{\cancel{n}}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \; \frac{\lambda^k}{k!} \; \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

let n grow,
and let λ grow with it
so that

$$\frac{\lambda}{n} = p$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \to 1$, $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \to e^{-\lambda}$, $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k \to 1$

k fixed, n grows

$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) \to 1$

$\approx P[Y=k]$

$Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$

k fixed

let n grow,

and let λ grow with it

so that

$$\frac{\lambda}{n} = p$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \to e^{-\lambda}$$

Remember

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$$