Idea of exponentiation:

$$\underline{a^{x+y} = a^x \cdot a^y}$$

Extend from natural x, y to rational x, y

a^{π} ?

$f(x) = a^x \Rightarrow \underline{f(x+y) = f(x) \cdot f(y)}$

<u>Exponential growth:</u>

Normalization

$$f'(x) = \alpha \cdot f(x) \quad , \quad f(0) = 1$$

These properties are all equivalent

Exponential growth implies

- $f' = f$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

- $g' = \alpha g$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \quad f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

More insight: Instead of

$$f(x+y) = f(x)\cdot f(y) \quad , \quad f(0)=1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f(x+y)}{f(x)} = \frac{f(y)}{f(0)}$$

Proportion of growth of f from x to $x+y$, during time of length y

Proportion of growth of f from 0 to y

long term Growth rate is the same for all periods y and starting points x

- $f' = \alpha f$

Show:

Fix y:

$$\frac{f(x+y)}{f(x)} = \frac{f(y)}{f(0)}$$

function of x

constant

Show: $\frac{f(x+y)}{f(x)} = \text{const}$

$$\left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g'h - gh'}{h^2}$$

Derivative:

$f'(x+y)$

$$\left(\frac{f(x+y)}{f(x)}\right)' = \frac{\frac{d}{dx}f(x+y)\cdot f(x) - f(x+y)f'(x)}{f(x)^2}$$

$$= \frac{\alpha f(x+y)\cdot f(x) - f(x+y)\cdot \alpha f(x)}{f(x)^2} = 0$$

Process w/o memory ; X waiting for a result of the process

$G(t) = P[X > t]$

Resilience fct., survival fct.

In a process w/o memory:

- $G(0) = 1$
- $G(s+t) = G(s) \cdot G(t)$

$\Rightarrow \quad G(t) = a^t, \quad a < 0, \quad e^{-\lambda t}, \quad \lambda = -\log a$

Maschinenausfall

In einer Werkstatt stehen drei Maschinen. Jede Maschine wird irgendwann ausfallen, und die Zeit bis zum Ausfall ist exponentiell verteilt mit der Rate 1 Woche.
Derzeit sind zwei der drei Maschinen in Betrieb, während eine, nennen wir sie R, in Reserve gehalten wird. Wenn eine der beiden ersten Maschinen ausfällt, wird sie durch die dritte Maschine ersetzt.
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die nächste Maschine, die ausfällt, R ist?

werner.nutt@gmail.com (not shared) Switch account

Die Wahrscheinlichkeit ist

- ○ 1/3
- ◉ 1/2 ✓
- ○ 2/3
- ○ Other:

Sei A die Maschine, die ausfällt, und B die Maschine, die weiterläuft. Dann ist die W.keit, dass B ausfällt genauso verteilt wie die W.keit, dass R ausfällt, da beide Zeiten $Exp(\lambda)$-verteilt sind mit demselben λ.

$G(t) = e^{-\lambda t}$ Survival/Resilience fct

Probability that process runs still at least t is $G(t)$

$\Rightarrow F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ cdf

Prob. that the process will stop after at most t

$f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

density

19. Telefongespräche

Die Dauer der Telefongespräche mit Kunden in einem Callcenter sei exponentialverteilt mit Rate $\lambda = 1/3$.

werner.nutt@gmail.com (not shared) Switch account

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gespräch länger als 3 Minuten dauert? ($T > 3$ Min)

- 1/3
- 1/e
- 1 - e^{-3}
- e/3

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gespräch höchstens 5 Minuten dauert? (T < 5 Min)

- 3/5
- e^{-3/5}
- 1 - e^{-5/3} ✓
- 1 - e^{-3}/5

$G(t) = e^{-\lambda t}$ Survival / Resilience fct

Probability that process runs still at least t is $G(t)$

1.) Survives 3 minutes: $\lambda = \frac{1}{3}$, $t = 3$ $\Rightarrow$ $G(3) = e^{-\frac{1}{3}\cdot 3} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\Rightarrow$ $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ cdf

Prob. that the process will stop after at most t

2.) Dies within 5 minutes: $F(5) = 1 - e^{-\frac{5}{3}}$

$f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ density

$X_i \sim Exp(\lambda_i)$, X_i waiting time for box i

Prob. of no mail at box i within time t

$$= P[X_i > t] = e^{-\lambda_i t}$$

Prob: no mail at any box $\qquad$ X_i are indep.

$$P[X_1 > t \wedge \cdots \wedge X_n > t]$$

$$= P[X_1 > t] \cdot P[X_2 > t] \cdots P[X_n > t]$$

$$= e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} \cdot \ldots \cdot e^{-\lambda_n t}$$

$$= e^{-\underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)}_{\text{Rate } \lambda_1 + \cdots + \lambda_n} t}$$

$1 - e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)t}$ = Prob. that a mail arrives at some box i

This is the distr. of

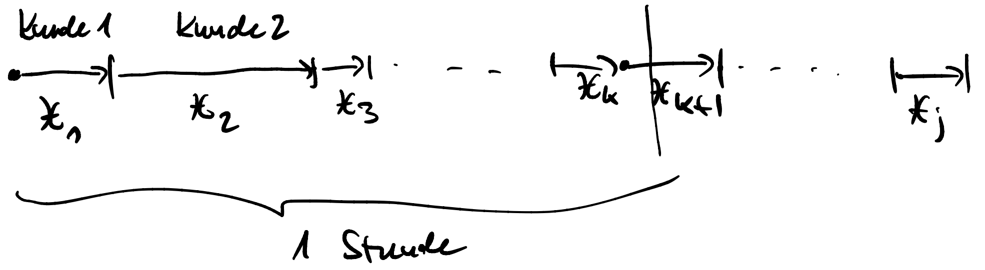
$$\min(X_1, \ldots, X_n)$$

<u>Prop</u>osition: $X_1, \ldots, X_n$ indep, $X_i \sim Exp(\lambda_i)$

$$\Rightarrow \min(X_1, \ldots, X_n) \sim Exp(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$$

Poisson-Verteilung

Beispiel: Kunden treffen in Geschäft ein mit Rate λ



Wie viele Kunden kommen pro Stunde?

$P[\text{k Kunden pro Stunden}] = ?$

Seien X_1, X_2 unabh. exp. verteilte ZV mit Rate λ

Interpretation: X_i sind Wartezeiten auf hintereinander stattfindende Ereignisse.

$P[\text{genau k Ereignisse im Intervall } [0,1]]$

etwa 1 Stunde, 1 Tag

- $S_k := \sum_{i=1}^{k} X_i$

- $N := \underset{k}{\operatorname{argmax}} (S_k \leq 1)$

N = maximale Zahl aufeinander folgender X_i, mit Summe ≤ 1

$P[N = k] = ?$

$N = k \iff S_k \leq 1$ und $S_k + X_{k+1} \geq 1$

$\iff X_{k+1} \geq 1 - S_k$

f sei Dichte von X_{k+1}

f_k sei Dichte von S_k

Es gilt:

- gem. Dichte von S_k und X_{k+1}: $f(s) \cdot f_k(t)$

- $P[N=k] = P[\underbrace{S_k \leq 1}_{0 \leq S_k \leq 1} \wedge X_{k+1} \geq 1 - S_k]$

$$= \int_0^1 f_k(t) \int_{1-t}^{\infty} f(s) \, ds \, dt$$

Wir wissen: $f(s) = \lambda e^{-\lambda s}$. Aber: $f_k(t) = ?$

$$f_k \sim S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$$

Kap. 2: X, Y unabh., $X \sim f$, $Y \sim g \Rightarrow X + Y \sim f * g$

$$(f*g)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(z-x) \, dx$$

$$f_1 \sim \sum_{i=1}^{1} X_i = X_1 \Rightarrow f_1(t) = f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$f_2 \sim \sum_{i=1}^{2} X_i = X_1 + X_2 \Rightarrow f_2 = f * f = f_1 * f$$

$$f_2(t) = (f_1 * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s)\, f(t-s)\, ds$$

$$= \int_0^t f_1(s) \cdot f(t-s)\, ds = \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \cdot \lambda e^{-\lambda(t-s)}\, ds$$

$$= \lambda^2 \int_0^t e^{-\lambda(s+t-s)}\, ds = \lambda^2 \int_0^t e^{-\lambda t}\, ds$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda t} \int_0^t 1 \cdot ds = \lambda^2 e^{-\lambda t}\, t$$

$$f_2(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_2(t) = \lambda^2 e^{-\lambda t}\, t$$

$$f_3(t) = (f_2 * f)(t) = \int_0^t f_2(s) \cdot f(t-s)\, ds$$

$$= \int_0^t \lambda^2 e^{-\lambda s} s \cdot \lambda e^{-\lambda(t-s)}\, ds$$

$$= \lambda^3 e^{-\lambda t} \int_0^t s\, ds = \lambda^3 e^{-\lambda t} \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^t$$

$$= \lambda^3 \cdot e^{-\lambda t} \cdot \frac{t^2}{2}$$

$$f_k(t) = \lambda^k \cdot e^{-\lambda t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \sim \ell_k$$

$$f_k(t) = \lambda^k \cdot e^{-\lambda t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$P[N=k] = \int_0^1 f_k(t) \int_{1-t}^{\infty} f(s)\, ds\, dt$$

$$= \int_0^1 \lambda^k \cdot e^{-\lambda t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \int_{1-t}^{\infty} \lambda e^{-\lambda s}\, ds\, dt$$

$$= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \int_0^1 t^{k-1} e^{-\lambda t} \left[-e^{-\lambda s} \right]_{1-t}^{\infty} dt$$

$$= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \int_0^1 t^{k-1} e^{-\lambda t} e^{\lambda(1-t)}\, dt$$

$$= \ldots$$

$$= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \int_0^1 t^{k-1} \underbrace{e^{-\lambda t} e^{-\lambda(1-t)}}^{e^{-\lambda}}\, dt$$

$$= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} \int_0^1 t^{k-1}\, dt$$

$$= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} \left[\frac{t^k}{k} \right]_0^1 = \frac{1}{k}$$

$$= \boxed{\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}} = P[N=k]$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P[N=k] = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) e^{-\lambda} = e^{\lambda} \cdot e^{-\lambda} = 1$$