3. Spezielle Zufallsvariablen

3.1 Bernoulli- und Binomialvariablen

Bernoulli-Experiment hat zwei mögliche Ergebnisse:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{falls Erfolg} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wahrscheinlichkeitsfkt. von X

$$P[X=1] = p \qquad\qquad 0 \le p \le 1$$

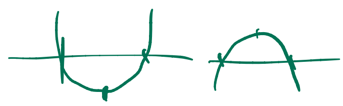
$$P[X=0] = 1-p$$

X ist eine Bernoulli-Variable mit Parameter p,

kurz Bern(p)-Variable

(nach Jakob Bernoulli, Ende des 17. Jhdts.)

Sei $X \sim \mathrm{Bern}(p)$.



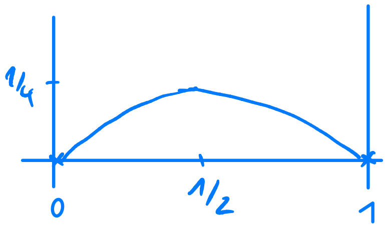
Parabel

$$E[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

$$E[X^2] = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) = p$$

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

$$\tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}$$



maximal

Wir wiederholen ein Bernoulli-Experiment n-mal,
d.h., wir haben n unabhängige Wiederholungen — n Münzwürfe
Wie oft haben wir Kopf?

$$\underset{\text{1. Wurf}}{X_1}, \quad \underset{\text{2. Wurf}}{X_2} \qquad \dots \qquad \underset{\text{n-te Wurf}}{X_n} \sim \mathrm{Bern}(p), \text{ unabh.}$$

$$Y_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$$ zählt die Anzahl der Erfolge (z.B. Köpfe)

Beispiel: $n = 8$

$$P[\times\ \times\ \checkmark\ \times\ \checkmark\ \times\ \times\ \checkmark] = p^3 \cdot (1-p)^5$$
$$P[\checkmark\ \checkmark\ \times\ \times\ \checkmark\ \times\ \times\ \times] = p^3 \cdot (1-p)^5$$
$$\dots$$
$\binom{8}{3}$ Möglichkeiten

$$P[Y_n = 3] = \binom{8}{3} p^3 \cdot (1-p)^5$$

Allgemein

$$P[Y_n = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$(p+q)^n \overset{\text{Binomialsatz}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$$

Hier: $q = 1-p$

$$1 = 1^k = (p + (1-p))^k = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{P[Y_n = k]}$$

Binomialverteilung

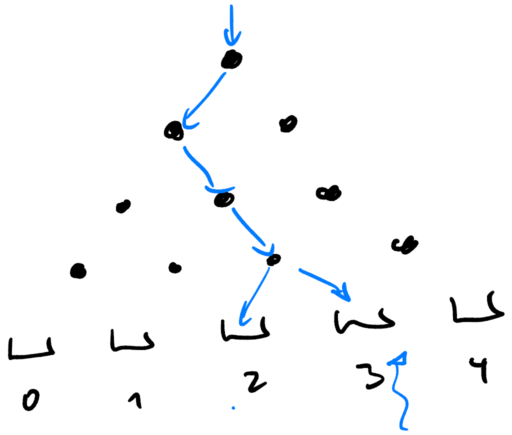
$$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \le k \le n$$

ist eine Wahrscheinlichk.fkt., d.h. $\sum_{k=0}^{n} p(k) = 1$

$y_n \sim B(n,p)$, y_n ist binomialverteilt mit Parametern n und p

Binomialverteilungen tauchen auf:

- beim Galtonbrett



$$\binom{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-3}$$

$$\binom{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$E[y_n] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p = n \cdot p$$

$$V(y_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p)$$

Beispiel: Ein Satelliten-System besteht aus 4 Komponenten und funktioniert, wenn mindestens 2 von ihnen arbeiten. Jede Komponente arbeitet unabhängig von den anderen mit Wkeit $p = 0{,}6$. Was ist die W.keit, dass das System funktioniert?

$P[\text{sys works}] = P[Y_4 \geq 2]$ $\qquad Y_4 \sim B(4, .6)$

Wir rechnen in R

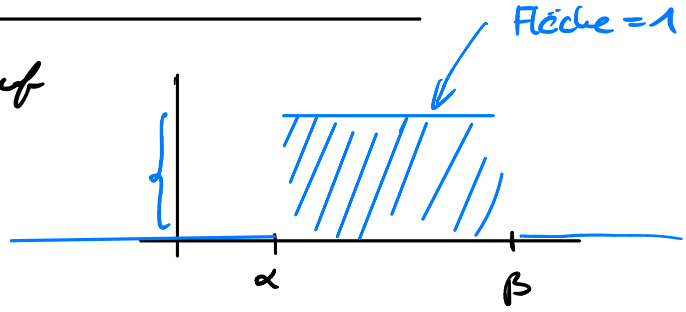
$$P[Y \geq 2]$$
$$= 1 - P[Y_4 \leq 1]$$
$$= 1 - \text{pbinom}(1, 4, .6)$$

uniformly distributed RV

3.3 Stetige gleichverteilte Zufallsvariable

X ist stetig gleichverteilt auf $[\alpha, \beta]$ wenn

- X nur Werte in $[\alpha, \beta]$ annimmt
- alle Werte gleich wahrscheinlich sind



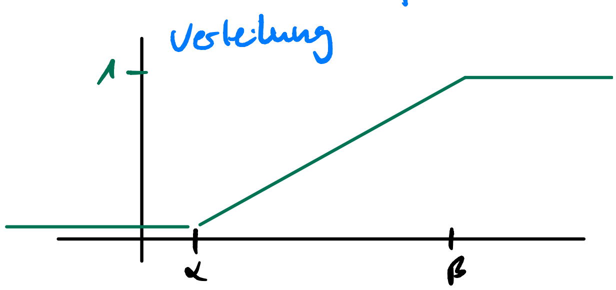
$1 = \text{Fläche} = c \cdot (\beta - \alpha)$

$\Rightarrow c = \frac{1}{\beta - \alpha}$

Dann hat X die Dichte f:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq \alpha \\ \frac{1}{\beta - \alpha}(x - \alpha) & \alpha \leq x \leq \beta \\ 1 & x \geq \alpha \end{cases}$$



$X \sim \text{Unif}[\alpha, \beta]$

$X \sim \text{Unif}[0,1]$

$$E[X] = \int_0^1 x \cdot 1 \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2 \cdot 1 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Dann

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12}$$
$$= \frac{1}{12}$$

$X = \text{Unif}[\alpha, \beta]$

1.Versuch

$$E[X] = \int_\alpha^\beta x \frac{1}{\beta-\alpha} dx = \frac{1}{\beta-\alpha} \left[\frac{x^2}{2} \right]_\alpha^\beta$$

$$= \frac{1}{\beta-\alpha} \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta-\alpha}$$

$$= \text{----}$$

Eine Schachtel enthält 5 rote und 3 blaue Kugeln. Sie ziehen eine zufällige Kugel, notieren die Farbe und legen die Kugel wieder zurück. Sie führen insgesamt 8 solcher Ziehungen hintereinander durch. X ist die Anzahl blauer Kugeln unter den 8 Ziehungen.

Your answer $n = 8, \quad p = \frac{3}{8}$

Eine Schachtel enthält 5 rote und 5 blaue Kugeln. Sie ziehen ohne hinzusehen insgesamt 3 Kugeln aus der Schachtel. X ist die Anzahl blauer Kugeln unter den 3 Kugeln.

Your answer Nein. Bei jedem Ziehen verändern sich die Wahrscheinlichkeiten.

Sie werfen gleichzeitig 8 faire Würfel mit Augenzahlen 1 bis 6. X ist die Anzahl der Würfel mit Augenzahl 1.

Your answer $n = 8, \quad p = \frac{1}{6}$

Sie werfen einen fairen Würfel mit Augenzahlen 1 bis 6 so lange, bis zum ersten Mal ein Sechser kommt. X ist die Anzahl Würfe bis zum ersten Sechser.

Your answer Nein. Die Anzahl der Würfe ist nicht festgelegt und es wird nicht gezählt.

Eine Schachtel enthält 5 rote und 3 blaue Kugeln. Sie ziehen eine zufällige Kugel, notieren die Farbe und legen die Kugel wieder zurück. Sie führen insgesamt 8 solcher Ziehungen hintereinander durch. X ist die Anzahl blauer Kugeln unter den 8 Ziehungen.

7 responses

p=3/8, n=8

p = 3/8 , n = 3

p = 0.6 n = 8

p = 3/8 n = 8

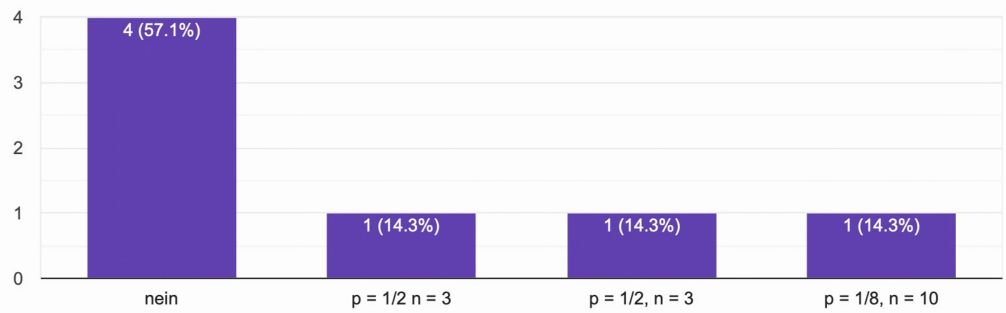
nein

Nein

p = 3/8, n = 8

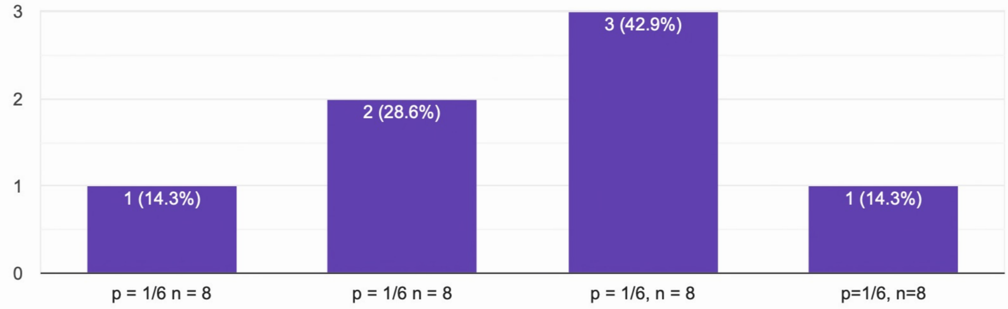
Eine Schachtel enthält 5 rote und 5 blaue Kugeln. Sie ziehen ohne hinzusehen insgesamt 3 Kugeln aus der Schachtel. X ist die Anzahl blauer Kugeln unter den 3 Kugeln.

7 responses



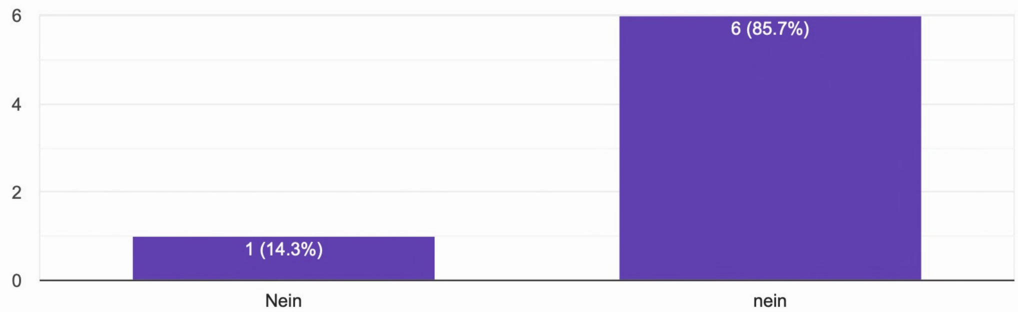
Sie werfen gleichzeitig 8 faire Würfel mit Augenzahlen 1 bis 6. X ist die Anzahl der Würfel mit Augenzahl 1.

7 responses



Sie werfen einen fairen Würfel mit Augenzahlen 1 bis 6 so lange, bis zum ersten Mal ein Sechser kommt. X ist die Anzahl Würfe bis zum ersten Sechser.

7 responses



Erwartungwert von $U[\alpha, \beta]$: Brute-Force-Berechnung

Hier ist eine Berechnung des Mittels/Erwartungswerts und der Varianz einer $U[\alpha,\beta]$-verteilten ZV X.

Vergleichen Sie dies mit dem vorigen Ansatz, bei dem wir

1) zunächst eine einfache Variante des Problems gelöst haben
2) den schwierigen allgemeinen Fall auf den einfachen reduziert haben

Also:

$$E[X] = \int_\alpha^\beta x \frac{1}{\beta-\alpha}\,dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^\beta$$

$$= \frac{1}{\beta-\alpha}\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2) = \frac{(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)}{2(\beta-\alpha)}$$

$$= \frac{\alpha+\beta}{2}$$

Varianz von $U[\alpha, \beta]$: Brute-Force-Berechnung

$$E[X^2] = \int_\alpha^\beta x^2 \frac{1}{\beta-\alpha}\,dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{x^3}{3}\right]_\alpha^\beta$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{\beta^3-\alpha^3}{\beta-\alpha} = \frac{1}{3}\left(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2\right)$$

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

$$= \frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{3} - \frac{(\alpha+\beta)^2}{2^2}$$

$$= \frac{4\beta^2+4\alpha\beta+4\alpha^2-3\alpha^2-6\alpha\beta-3\beta^2}{12}$$

$$= \frac{1}{12}\left(\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2\right) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

Sei $Y \sim U[\alpha, \beta]$

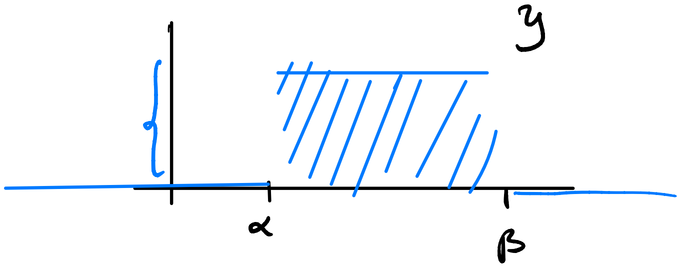
$X := \frac{1}{\beta - \alpha}(Y - \alpha)$

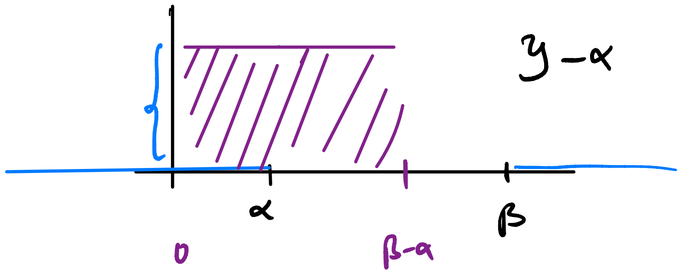
$\Rightarrow X \sim \mathrm{Unif}[0,1]$

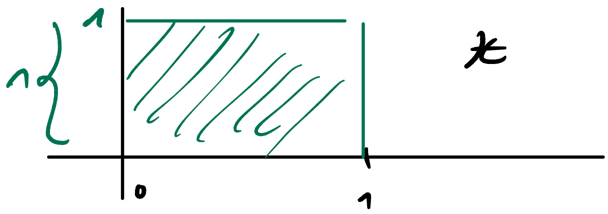
$\Rightarrow Y = (\beta-\alpha)X + \alpha$

$E[X] = \frac{1}{2}, \quad Var(X) = \frac{1}{12}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow E[Y] &= E[(\beta-\alpha)X + \alpha] \\ &= E[(\beta-\alpha)X] + E[\alpha] \\ &= (\beta-\alpha)E[X] + \alpha \\ &= \frac{\beta-\alpha}{2} + \alpha = \frac{\beta-\alpha+2\alpha}{2} \\ &= \frac{\alpha+\beta}{2}\end{aligned}$$







$Y = (\beta-\alpha)X + \alpha$

$$\begin{aligned}Var(Y) &= Var((\beta-\alpha)X + \alpha) = \\ &= Var((\beta-\alpha)X) = (\beta-\alpha)^2 Var(X) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}\end{aligned}$$

18. Gleichverteilung

An einer Haltestelle vor der Universität halten Busse der Linien 1 und 2. Beide Linien fahren im 12-Minuten-Takt, wobei Linie 1 immer 3 Minuten vor Linie 2 fährt. Ein Student kommt zufällig im Sinne einer stetigen Wahrscheinlichkeit-Verteilung bei der Haltestelle an.

werner.nutt@gmail.com (not shared) Switch account

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der nächste Bus zur Linie 1 gehört?

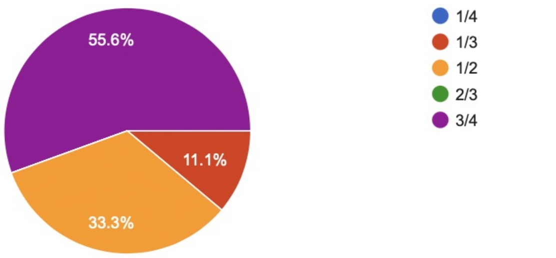
- 1/4
- 1/3
- 1/2
- 2/3
- 3/4

Wie lange wartet der Student im Mittel, bis der nächste Bus kommt?

- 8.25 Minuten
- 6 Minuten
- 4.5 Minuten
- 3.75 Minuten
- 3 Minuten

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der nächste Bus zur Linie 1 gehört?

9 responses



Wie lange wartet der Student im Mittel, bis der nächste Bus kommt?

8 responses