# 7 Erwartungswerte

### 7.1 Merkmale von Permutationen

In dieser Aufgabe untersuchen wir verschiedene Merkmale von Permutationen, und zählen, wie häufig sie bei einer gegebenen Permuation auftreten. Diese Häufigkeiten betrachten wir als Zufallsvariablen und bestimmen ihren Erwartungswert, unter der Annahme, dass alle Permutationen gleich wahrscheinlich sind. Solche Erwartungswerte sind damit durchschnittliche Häufigkeiten.

Einige der untersuchten Merkmale sind nützlich für die Komplexitätsanalyse von Array-Algorithmen, insbesondere, für die Ermittlung der durchschnittlichen Laufzeit.

Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Eine *Permutation vom Grad* $n$ ist eine Abbildung

$$\pi \colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$$

mit $\pi(i) \neq \pi(j)$ falls $i \neq j$. Eine Permutation vertauscht also alle Zahlen aus $\{1, \ldots, n\}$ miteinander. Permutationen werden oft kompakt als Zahlentupel $(\pi(1), \ldots, \pi(n))$ dargestellt. Zum Beispiel stellt

$$\pi = (3, 2, 1)$$

die Permutation vom Grad 3 dar mit $\pi(1) = 3$, $\pi(2) = 2$ und $\pi(3) = 1$. Alternativ können wir uns eine Permutation vom Grad $n$ auch als ein Array der Länge $n$ mit $n$ verschiedenen Werten zwischen 1 und $n$ vorstellen.

Wie schon früher gesehen, ist die Anzahl der Permutationen vom Grad $n$ gerade $n!$, das heißt, die Kardinalität von $\Pi_n$ ist $n!$, kurz $\sharp\, \Pi_n = n!$.

Wir können $\Pi_n$ als Stichprobenraum mit gleichverteilter diskreter Wahrscheinlichkeit ansehen. Dazu geben wir jeder Permutation $\pi \in \Pi_n$ die Wahrscheinlichkeit $P(\pi) = {}^1\!/_{n!}$.

Wir führen verschiedene Merkmale von Permutationen ein. Sei $\pi$ eine Permutation vom Grad $n$. Dann sagen wir

- $\pi$ hat einen *Fixpunkt* an der Stelle $i$, falls $\pi(i) = i$ gilt;
- $\pi$ hat ein *Stufe* an der Stelle $i$, falls $\pi(i+1) = \pi(i) + 1$ gilt;
- $\pi$ hat einen *Anstieg* an der Stelle $i$, falls $\pi(i+1) > \pi(i)$ gilt;
- $\pi$ hat eine *Inversion* zwischen den Stellen $i$ und $j$, mit $i < j$, falls $\pi(i) > \pi(j)$ gilt;
- $\pi$ hat einen *Anstieg der Höhe 2* an der Stelle $i$, falls $\pi(i+1) = \pi(i) + 2$ gilt.

Für eine Permutation $\pi$ sei

- $\mathcal{F}(\pi)$ die Anzahl der Fixpunkte von $\pi$;
- $\mathcal{St}(\pi)$ die Anzahl der Stufen von $\pi$;
- $\mathcal{A}(\pi)$ die Anzahl der Anstiege von $\pi$;
- $\mathcal{I}(\pi)$ die Anzahl der Inversionen von $\pi$;
- $\mathcal{H}(\pi)$ die Anzahl der Anstiege der Höhe 2 von $\pi$.

Für gegebenes $n$ ist jede der Funktionen $\mathcal{F}$, $\mathcal{St}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{I}$ und $\mathcal{H}$ eine Zufallsvariable auf dem Stichprobenraum $\Pi_n$. Wir interessieren uns für die durchschnittliche Anzahl der Fixpunkte, Stufen, Anstiege, Inversionen und Anstiege der Höhe 2 der Permutationen vom Grad $n$. Dies ist gleichbedeutend damit, die Erwartungswerte dieser Funktionen zu bestimmen.

Bestimmen Sie für gegebenes $n$ die Erwartungswerte

1. $E[\mathcal{F}]$;
2. $E[\mathcal{St}]$;
3. $E[\mathcal{A}]$;
4. $E[\mathcal{I}]$;
5. $E[\mathcal{H}]$.

**Hinweis:** Gehen Sie so vor, dass Sie die gegebene Zufallsvariable $\mathcal{X}$ in einfache ZVen $\mathcal{X}_i$ zerlegen, die nur die Werte 0 oder 1 annehmen, so dass gilt

$$\mathcal{X} = \sum_i \mathcal{X}_i.$$

Jedem $\mathcal{X}_i$ entspricht dann das Ereignis[1] $\mathcal{E}_i$ definiert durch

$$\mathcal{E}_i = \{\, \pi \in \Pi_n \mid \mathcal{X}_i(\pi) = 1 \,\}.$$

Der Erwartungswert von $\mathcal{X}_i$ ist dann die Wahrscheinlichkeit von $\mathcal{E}_i$, weil gilt

$$P(\mathcal{E}_i) = P[\mathcal{X}_i = 1] = 1 \cdot P[\mathcal{X}_i = 1] + 0 \cdot P[\mathcal{X}_i = 0] = \mathcal{E}[X_i].$$

Da $\mathcal{X}$ die Summe der $\mathcal{X}_i$ ist, können wir für so eine Zerlegung schließen, dass

$$\mathcal{E}[\mathcal{X}] = \mathcal{E}\left[\sum_i \mathcal{X}_i\right] = \sum_i \mathcal{E}[\mathcal{X}_i],$$

[1]Beachte, dass Ereignisse Teilmengen des Stichprobenraums sind. In unserem Fall ist der Stichprobenraum die Menge $\Pi_n$ und die Elemente sind Permutationen. Teilmengen von $\Pi_n$ sind daher Mengen von Permutationen vom Grad $n$.

wir können also den Erwartungswert von $\mathcal{X}$ aus den Erwartungswerten der $\mathcal{X}_i$ berechnen. Welches geeignete $\mathcal{X}_i$ sind, hängt natürlich vom jeweiligen Problem ab. Für die durchschnittliche Zahl von Fixpunkten ist es zum Beispiel günstig, für $i = 1, \ldots, n$ die $\mathcal{F}_i$ so zu definieren, dass sie testen, ob $i$ ein Fixpunkt von $\pi$ ist, also

$$\mathcal{F}_i(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \pi(i) = i \\ 0 & \text{falls } \pi(i) \neq i. \end{cases}$$

### 7.2 Merkmale von Auswahlen

Wir untersuchen hier Auswahlen am Beispiel von roten und blauen Kugeln. Wie in der Vorlesung unterscheiden wir Auswahlen mit und ohne Zurücklegen.
Wir betrachten im Folgenden eine Urne mit $n$ Kugeln, von denen $r$ Kugeln rot und die übrigen blau sind. Wir ziehen zufällig $k$ Kugeln aus der Urne und fragen:

> Wie viele der gezogenen Kugeln sind im Durchschnitt rot?

Wir modellieren das Problem wie folgt. Wir identifizieren die Urne mit der Menge der Zahlen von 1 bis $n$ und die roten Kugeln mit den Zahlen 1 bis $r$, die Zahlen von $r + 1$ bis $n$ entsprechen den blauen Kugeln, also $U = \{1, \ldots, n\}$ und $R = \{1, \ldots, r\}$. Einer Auswahl von $k$ Kugeln entspricht dann eine Folge $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ von $k$ Zahlen aus $U$.

- Die Folge $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ steht für eine Auswahl *mit Zurücklegen*, wenn in $x$ *dieselbe Zahl mehrmals* vorkommen kann.
- Die Folge $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ steht für eine Auswahl *ohne Zurücklegen*, wenn *alle Zahlen in $x$ verschieden* sind.

Das Zählen der roten Kugeln modellieren wir durch die Zufallsvariable $\mathcal{R} \colon \mathcal{S}_k \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathcal{R}(x) = \sharp\{\, i \mid x_i \in R \,\},$$

das heißt, der Wert von $\mathcal{R}$ für eine Folge $x$ ist die Anzahl der Stellen, an denen in $x$ eine „rote Zahl" steht.
Nehmen wir zum Beispiel an $n = 10$, $r = 4$, $k = 3$. Dann ist $x = (9, 2, 5)$ eine Folge der Länge 3, die keine Wiederholung enthält. Sie kann sowohl das Resultat eine Auswahl mit Zurücklegen als auch einer Auswahl ohne Zurücklegen sein. Die Folge $x' = (4, 7, 4)$ kann nur das Resultat einer Auswahl mit Zurücklegen sein. Da die Zahlen von 1 bis 4 die roten Kugeln modellieren, ist $\mathcal{R}(x) = 1$ und $\mathcal{R}(x') = 2$.

Bestimmen Sie

1. $E[\mathcal{R}]$ für den Fall von Auswahlen mit Zurücklegen;
2. $E[\mathcal{R}]$ für den Fall von Auswahlen ohne Zurücklegen.

**Hinweis:** Gehen Sie vor wie bei Aufgabe 1 und zerlegen Sie $\mathcal{R}$ in einfachere ZVen $\mathcal{R}_i$. Beachten Sie, dass verschiedene Fragen möglicherweise verschiedene Zerlegungen benötigen.

### 7.3 Komplexität von Selection Sort

Aus der Vorlesung über Algorithmen und Datenstrukturen kennen wir den Sortier-Algorithmus Insertion Sort:

```
(1)   void insertionSort(int[] A)
(2)      for j := 2 to n do // A[1..j-1] is already sorted
(3)         val := A[j];
(4)         i := j-1;
(5)         while i >= 1 and A[i] > val do
(6)            A[i+1] := A[i];
(7)            i--;
(8)         A[i+1] := val
```

Wir wollen die durchschnittliche Laufzeit von Insertion Sort analysieren. Wir interessieren uns dabei insbesondere für die Anzahl der Zuweisungen an oder von Array-Elementen und für die Anzahl der Vergleiche mit Array-Elementen.
Für solch eine Untersuchung braucht es Annahmen über die Wahrscheinlichkeit möglicher Eingaben:

- Wir nehmen dazu an, dass in einem Eingabe-Array $A$ alle Komponenten verschieden sind.
- Weil die Laufzeit nur von der Anordnung der Elemente abhängt und nicht ihrem Wert, nehmen wir an, dass die Eingabe eine Permutation der Menge $\{1, \ldots, n\}$ enthält.
- Schließlich nehmen wir an, dass alle diese Arrays als Eingabe gleich wahrscheinlich sind, was gleichbedeutend damit ist, dass im Allgemeinen alle Anordnungen gleich wahrscheinlich sind.

Wir analysieren zunächst die Anzahl der Zuweisungen (engl. *assignments*).

- Bei jedem Durchlauf der äußeren Schleife, mit Index `j` $= j$, wird jeweils eine Zuweisung in Zeile (3) und in Zeile (8) ausgeführt.
- Außerdem wird in Zeile (6) eine variable Zahl von Zuweisungen ausgeführt, die davon abhängt, wie oft die innere Schleife für den Wert $j$ von `j` durchlaufen wird.

Nach diesen Vorüberlegungen gehen wir nun an die eigentliche Analyse.

1. Angenommen, die Variable `j` enthält den Wert $j$ und die Variable `i` enthält den Wert $i$. Unter welcher Bedingung an die Position $j$ des Eingabearrays und der ursprünglichen Position des Werts $A[i]$ führt der Algorithmus die Zuweisung `A[i+1]:=A[i]` in Zeile (6) aus?
2. Verwenden Sie ein Resultat aus Aufgabe 7.1, um die durchschnittliche Zahl der Ausführungen von Zeile (6) zu bestimmen.
3. Was ist die durchschnittliche Zahl von Zuweisung von oder an Positionen im Array $A$?
4. Was ist die durchschnittliche Zahl von Vergleichen mit Array-Elementen?