6 Diskrete gemeinsame Verteilungen, Stetige Gleichverteilungen

6.1 Münzwurf

Sie werfen zwei faire Münzen, d.h. die Wahrscheinlichkeit für Kopf und Zahl ist $\frac{1}{2}$. Dann werfen Sie die Münzen, bei denen Zahl erschien, noch einmal.
Es sei $\mathcal{X}$ sei die Anzahl der Münzen, die beim ersten Wurf Kopf zeigten, und $\mathcal{Y}$ die Anzahl der noch einmal geworfenen Münzen, die beim zweiten Wurf Kopf zeigten.
Dann sind $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ Zufallsvariablen mit den möglichen Werten $0 \leq \mathcal{X} \leq 2$ und $0 \leq \mathcal{Y} \leq 2 - \mathcal{X}$.

1. Entwickeln Sie eine Formel für die Wahrscheinlichkeit $P[\mathcal{X} = i]$, falls $0 \leq i \leq 2$.

2. Entwickeln Sie eine Formel für die Wahrscheinlichkeit $P[\mathcal{X} = i,\ \mathcal{Y} = j]$, falls $0 \leq i \leq 2$ und $0 \leq j \leq 2 - i$.

3. Zeichnen Sie eine Tabelle mit der gemeinsamen Verteilung der Zufallsvariablen $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$, einschließlich der Randwahrscheinlichkeiten. Die Tabelle sollte die folgende Form haben:

	$\mathcal{Y} = 0$	$\mathcal{Y} = 1$	$\mathcal{Y} = 2$	Randw. von $\mathcal{X}$
$\mathcal{X} = 0$				
$\mathcal{X} = 1$				
$\mathcal{X} = 2$				
Randw. von $\mathcal{Y}$				1

4. Wie groß ist der Erwartungswert von $\mathcal{X}$?

5. Wie groß ist der Erwartungswert von $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$?

6. Sind $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ unabhängig?

6.2 Mittelwert und Varianz der stetigen Gleichverteilung

Eine stetige Zufallsvariable $\mathcal{X}$ ist gleichverteilt, wenn es ein Intervall $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ gibt, mit $\alpha < \beta$, so dass $\mathcal{X}$ alle Werte aus $[\alpha, \beta]$ annimmt und alle diese Werte gleich wahrscheinlich sind. Eine solche Zufallsvariable ist also verteilt mit einer Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} c & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $c > 0$ eine Konstante ist, die bewirkt, dass f eine Dichte ist. Wir schreiben in solch einem Fall $\mathcal{X} \sim \text{Unif}[\alpha, \beta]$.

1. Bestimmen Sie die Konstante c.

2. Angenommen, $\mathcal{X}$ ist gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 1]$, also $\mathcal{X} \sim \text{Unif}[0, 1]$. Was sind dann der Erwartungswert/Mittelwert $E[\mathcal{X}]$ und die Varianz $\mathit{Var}(\mathcal{X})$?

3. Was sind Mittelwert und Varianz einer stetigen Zufallsvariablen $\mathcal{Y}$, die auf einem Intervall $[\alpha, \beta]$ gleichverteilt ist?

   Hinweis: Überlegen Sie zunächst, welches der beste Weg ist, diese Frage zu beantworten. Überlegen Sie insbesondere, inwieweit Sie die Antwort auf die vorhergehende Frage nutzen können.

6.3 Warten auf den nächsten Bus

Am Bahnhof halten Busse der Linien 1 und 2, die beide ins Stadtzentrum fahren. Beide Linien verkehren im 12-Minuten-Takt,[1] wobei Linie 1 immer 3 Minuten vor Linie 2 fährt. Touristen kommen zufällig im Sinne einer stetigen Wahrscheinlichkeits-Verteilung am Bahnhof an und nehmen den nächsten Bus ins Zentrum.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Tourist einen Bus der Linie 1 nimmt?

2. Wie lange wartet ein Tourist im Mittel, bis der nächste Bus kommt?

3. Was ist die Varianz der Wartezeit eines Touristen?

   Hinweis: Diese Frage ist schwieriger als die ersten zwei. Man muss die Dichte der Wartezeit eines zufälligen Touristen bestimmen.

Tipp: Versuchen Sie, das Problem mit Hausverstand („common sense“) zu lösen, ohne nach Formeln zu schauen, die Sie anwenden können.

[1] Eine Linie verkehrt im 12-Minuten-Takt, wenn die Busse der Linie im Abstand von 12 Minuten fahren.