PTS Vorlesung – Kap 3

3 Spezielle Zufallsvariablen

3.1 Bernoulli und Binomialvariablen

Ein Bernoulli-Experiment hat zwei mögliche Ergebnisse

$$X = \begin{cases} 1 & \text{falls Erfolg} \\ 0 & \text{falls Fehlschlag} \end{cases}$$

Wahrscheinlichkeitsfunktion von X:

$$P[X=1] = p \qquad \text{für ein } p \text{ mit } 0 \le p \le 1$$

$$P[X=0] = 1-p$$

Eine ZV mit möglichen Werten 0, 1 und $P[X=1]$ ist eine Bernoulli-ZV mit Parameter p, oder kurz eine Bern(p)-Variable.

Erwartungswert und Varianz einer Bernoulli-Variablen

Sei X eine Bernoulli-Variable mit Wahrscheinlichkeit p. Dann ist

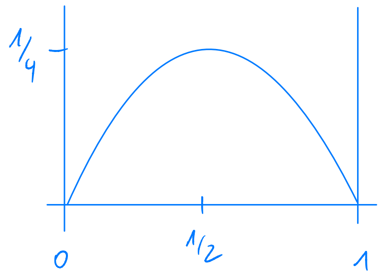
$$E[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

$$E[X^2] = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) = p$$

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

$$= p - p^2 = p(1-p)$$

maximal für $p = \frac{1}{2}$



Graph von $p(1-p)$, maximal für $p = \frac{1}{2}$

Wir wiederholen ein Bernoulli-Experiment (Beispiel: Münzwurf)

Seien $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ u.i.v. Bernoulli-Variablen mit Parameter p.
Dann zählt die Variable

$$Y_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$$

die Anzahl der Erfolge des Experiments

(etwa: Anzahl der Köpfe bei n Münzwürfen)

☒	☑	☑	☒	☒	☒	☑	☒
1	2	3	4	5	6	7	8

Wir notieren Erfolg und
3× Erfolg, 5× Mißerfolg

Wie viele Möglichkeiten gibt es,
bei 3 von 8 Versuchen Erfolg zu haben?

Wie groß ist die W.keit für Erfolg bei Versuch 2, 3, 7 und
Misserfolg bei den anderen fünf?

☒	☑	☑	☒	☒	☒	☑	☒
1	2	3	4	5	6	7	8

Wir notieren Erfolg und
3x Erfolg, 5x Mißerfolg

Wie viele Möglichkeiten gibt es,
bei 3 von 8 Versuchen Erfolg zu haben? $\binom{8}{3}$

Wie groß ist die W.keit für Erfolg bei Versuch 2, 3, 7 und
Misserfolg bei den anderen fünf? $p^3(1-p)^5$

Wie ist $Y_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$ verteilt?

$$P[Y_n = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Beachte:

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

nach dem Binomialsatz.

Sei $q = 1-p$. Dann gilt

$$1 = (1 + (1-p))^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Dies zeigt, dass

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad , \quad 0 \le k \le n$$

eine Wahrscheinlichkeitsfunktion ist.

Wir sagen, dass Y_n verteilt ist nach der Binomialverteilung mit den Parametern n und p, geschrieben

$$Y_n \sim B(n,p).$$

Wir bestimmen Mittelwert und Varianz:

$$E[Y_n] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p = n \cdot p$$

$$Var(Y_n) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = n \cdot p(1-p)$$

Beispiel: Ein Satelliten-System besteht aus 4 Komponenten und funktioniert, wenn mindestens 2 von ihnen arbeiten. Jede Komponente arbeitet unabhängig von den anderen mit Wkeit $p = 0{,}6$. Was ist die W.keit, dass das System funktioniert?

P[System funktioniert]
$= 1 - P$[System funktioniert nicht]
$= 1 - p_0$

$p_0 = P$[alle Komponenten fallen aus] + P[=3 Komponenten fallen aus]

$= P$[kein Komp. arbeitet] + P[=1 Komp. arbeitet]

$$= \binom{4}{0} p^0 \cdot (1-p)^4 + \binom{4}{1} p^1 \cdot (1-p)^3$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 0{,}4^4 + 4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}1792$$

Eine Schachtel enthält 5 rote und 3 blaue Kugeln. Sie ziehen eine zufällige Kugel, notieren die Farbe und legen die Kugel wieder zurück. Sie führen insgesamt 8 solcher Ziehungen hintereinander durch. X ist die Anzahl blauer Kugeln unter den 8 Ziehungen.

Your answer

Eine Schachtel enthält 5 rote und 5 blaue Kugeln. Sie ziehen ohne hinzusehen insgesamt 3 Kugeln aus der Schachtel. X ist die Anzahl blauer Kugeln unter den 3 Kugeln.

Your answer

Sie werfen gleichzeitig 8 faire Würfel mit Augenzahlen 1 bis 6. X ist die Anzahl der Würfel mit Augenzahl 1.

Your answer

Sie werfen einen fairen Würfel mit Augenzahlen 1 bis 6 so lange, bis zum ersten Mal ein Sechser kommt. X ist die Anzahl Würfe bis zum ersten Sechser.

Your answer

Beim Roulette sind auf einer Scheibe 37 Felder mit den Zahlen von 0 bis 36 nummeriert. Davon sind 18 Felder rot, 18 Felder schwarz, und ein Feld grün. Bei jedem Spiel läuft eine Kugel auf der Scheibe und bleibt zufällig auf einem Feld liegen. Sie beobachten insgesamt 30 Spiele. X ist die Anzahl der Spiele, bei denen die Kugel auf einem roten Feld gelandet ist.

Your answer

Ein Single-Choice-Test enthält 30 Fragen mit jeweils 5 Antwortmöglichkeiten. Bei jeder Frage ist genau eine Antwort richtig. Sie kreuzen bei jeder Frage zufällig eine Antwortmöglichkeit an. X ist die Anzahl richtig beantworteter Fragen.

Your answer

Sie werfen nacheinander 4 faire Würfel mit Augenzahlen 1 bis 6. X ist die Anzahl verschiedener Augenzahlen unter den 4 Würfen.

Your answer

Eine unfaire Münze mit den 2 Seiten „Kopf“ und „Zahl“ zeigt mit 70 % Wahrscheinlichkeit „Kopf“. Sie werfen die Münze 18 Mal. X ist die Anzahl der Würfe mit Ergebnis „Zahl“.

Your answer

In einer Übungsgruppe gibt es 12 Studenten und 8 Studentinnen. Der Übungsleiter wählt nacheinander zufällig 5 Personen unter den 20 Teilnehmern aus, um Fragen zu beantworten. X ist die Anzahl der Studentinnen unter den 5 aufgerufenen Personen.

Your answer

3.3 Stetige gleichverteilte Zufallsvariablen

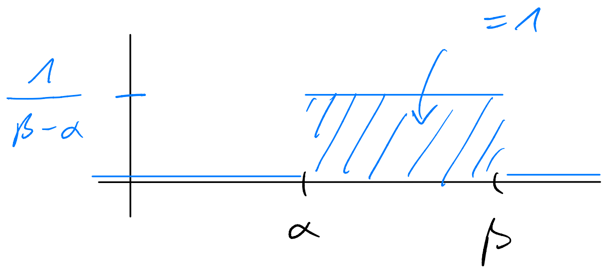
(Uniform Random Variables)

Eine stetige Zufallsvariable $\mathcal{X}$ ist gleichverteilt, wenn es ein Intervall $[\alpha, \beta]$ gibt, so dass

- $\mathcal{X}$ nur Werte in $[\alpha, \beta]$ annimmt
- alle Werte gleich wahrscheinlich sind.

Dann hat $\mathcal{X}$ die Dichte f mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \alpha \le x \le \beta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Wir schreiben $\mathcal{X} \sim U[\alpha, \beta]$

Was sind Mittelwert und Varianz von $\mathcal{X}$?

Wir bestimmen zunächst Mittelwert/Erwartungswert und Varianz für den einfachen Fall $\mathcal{X} \sim [0,1]$. Dann gilt:

$$E[\mathcal{X}] = \int_0^1 x \cdot 1 \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$E[\mathcal{X}^2] = \int_0^1 x^2 \cdot 1 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Also:

$$\begin{aligned} Var(\mathcal{X}) &= E[\mathcal{X}^2] - E[\mathcal{X}]^2 \\ &= \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Erwartungwert von $U[\alpha,\beta]$: Brute-Force-Berechnung

Hier ist eine Berechnung des Mittels/Erwartungswerts und der Varianz einer $U[\alpha,\beta]$-verteilten ZV X.

Vergleichen Sie dies mit dem vorigen Ansatz, bei dem wir

1) zunächst eine einfache Variante des Problems gelöst haben
2) den schwierigen allgemeinen Fall auf den einfachen reduziert haben

Also:

$$E[X] = \int_\alpha^\beta x \frac{1}{\beta-\alpha}\,dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^\beta$$

$$= \frac{1}{\beta-\alpha}\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2) = \frac{(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)}{2(\beta-\alpha)}$$

$$= \frac{\alpha+\beta}{2}$$

Varianz von $U[\alpha,\beta]$: Brute-Force-Berechnung

$$E[X^2] = \int_\alpha^\beta x^2 \frac{1}{\beta-\alpha}\,dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{x^3}{3}\right]_\alpha^\beta$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\beta^3-\alpha^3}{\beta-\alpha} = \frac{1}{3}(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)$$

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2]-E[X]^2$$

$$= \frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{3} - \frac{(\alpha+\beta)^2}{2^2}$$

$$= \frac{4\beta^2+4\alpha\beta+4\alpha^2-3\alpha^2-6\alpha\beta-3\beta^2}{12}$$

$$= \frac{1}{12}(\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

Sei nun $Y \sim U[\alpha, \beta]$.

Dann ist $X := \frac{1}{\beta - \alpha}(Y - \alpha)$ verteilt nach $U[0,1]$ und

$$Y = (\beta - \alpha) X + \alpha.$$

Daher gilt nach den Regeln für Erwartungswert und Varianz

$$E[Y] = E[(\beta - \alpha) X + \alpha] = (\beta - \alpha) E[X] + \alpha$$
$$= \frac{\beta - \alpha}{2} + \alpha = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$Var(Y) = Var((\beta - \alpha) X + \alpha) = (\beta - \alpha)^2 Var(X)$$
$$= \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

18. Gleichverteilung

An einer Haltestelle vor der Universität halten Busse der Linien 1 und 2. Beide Linien fahren im 12-Minuten-Takt, wobei Linie 1 immer 3 Minuten vor Linie 2 fährt. Ein Student kommt zufällig im Sinne einer stetigen Wahrscheinlichkeit-Verteilung bei der Haltestelle an.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der nächste Bus zur Linie 1 gehört?

- ○ 1/4
- ○ 1/3
- ○ 1/2
- ○ 2/3
- ○ 3/4

Wie lange wartet der Student im Mittel, bis der nächste Bus kommt?

- ○ 8.25 Minuten
- ○ 6 Minuten
- ○ 4.5 Minuten
- ○ 3.75 Minuten
- ○ 3 Minuten

Exponentialfunktionen

Wir untersuchen drei verschiedene Eigenschaften von reellen Funktionen:

1) $f(x) = a^x$ f.a. $x \in \mathbb{Q}$ (d.h. x wie $\frac{m}{n}, \frac{13}{7}, \dots$), für ein $a > 0$

$a^1, a^2, a^{1/4} = \sqrt[4]{a}$, $a^0 = 1$

$a^3 \cdot a^{-3} = a^0 = 1 \Rightarrow a^{-3} = \frac{1}{a^3}$

$a^{-\frac{7}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^7}}$

Exponenzieren

2) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ f.a. $x, y \in \mathbb{R}$

Addition wird Multiplikation

3) $f'(x) = \alpha f(x)$ f.a. $x \in \mathbb{R}$ und für ein $\alpha \neq 0$, und $f(0) = 1$

Wachstum proportional zum Wert

wie $(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$

Wir werden sehen, dass für differenzierbare Funktionen diese drei Eigenschaften äquivalent sind.

Wenn eine differenzierbare Funktion eine dieser Eigenschaften hat, dann hat sie auch die anderen zwei.

Wir zeigen:

1) impliziert 2)
2) impliziert 3)
3) impliziert 2)
2) impliziert 1)

Wir merken an, dass Exponenzieren auch für reelle Zahlen als Exponenten definiert werden kann. Dies ist allerdings nur von konzeptuellem Interesse, weil es zu keinem praktikablen Weg führt, Potenzen zu berechnen. Wie das geht, sehen wir später.

Ist $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl, so können wir x durch rationale Zahlen approximieren. Das heißt, es gibt eine Folge rationaler Zahlen r_n, so dass

$$\lim_{n \to \infty} r_n = x \qquad \text{oder} \qquad r_n \to x$$

Dann definieren wir $a^x := \lim_{n \to \infty} a^{r_n}$

Zum Beispiel ergibt dies

$$5^\pi = \lim \left(5^3, 5^{\frac{31}{10}}, 5^{\frac{314}{1000}}, \dots \right)$$

Implikation 1) ⟹ 2)

Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **differenzierbar** und gibt es ein $a\in\mathbb{R}$, so dass

$f(x)=a^x$ **f.a.** $x\in\mathbb{Q}$ — Exponenzieren

dann gilt

$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ **f.a.** $x,y\in\mathbb{R}$ — Addition wird Multiplikation

Beweis: Auf Grund der Eigenschaften des Exponenzierens haben wir

$$(*)\quad f(x+y)=f(x)\cdot f(y)\quad \text{f.a. } x,y\in\mathbb{Q}$$

Als differenzierbare Funktion ist f auch stetig und daher gilt die Gleichung $(*)$ auch für alle $x,y\in\mathbb{R}$, da auch Addition und Multiplikation stetig sind.

Implikation 2) ⟹ 3)

Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **differenzierbar** und gilt

$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ f.a. $x,y\in\mathbb{R}$ — Addition wird Multiplikation

dann gibt es eine Konstante $\alpha\in\mathbb{R}$, so dass

$f'(x)=\alpha f(x)$ f.a. $x\in\mathbb{R}$ und $f(0)=1$ — Wachstum proportional zum Wert

Beweis: Zunächst beachten wir, dass Eigenschaft 2) impliziert

$$f(0)=1.$$

Dies ist der Fall, weil

$$f(0)=f(0+0)=f(0)\cdot f(0),$$

woraus folgt

$$1=f(0).$$

Als nächstes schauen wir, was wir übers f' folgern können:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x)\cdot f(h) - f(x)\cdot 1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x)-1}{h} \cdot f(x) \right) \\ &= \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{h} \right) \cdot f(x) \\ &= f'(0)\cdot f(x) \end{aligned}$$

Also ist $f'(0)$ das α, das wir gesucht haben.

Implikation 3) ⇒ 2)

Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gilt $f(0) = 1$ und gibt es eine Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass

$$f'(x) = \alpha f(x) \quad \text{f.a. } x \in \mathbb{R}$$

Wachstum proportional zum Wert

dann ist

$$f(x+y) = f(x)\cdot f(y) \quad \text{f.a. } x, y \in \mathbb{R}$$

Addition wird Multiplikation

Beweis: Die Argumentation hier ist etwas länger. Wir überlegen uns zuerst, dass es reicht, die Behauptung für $\alpha = 1$ zu zeigen.

Für diesen Fall erhalten wir für f die Potenzreihe (power series) der Exponentialfunktion, mit deren Hilfe wir zeigen, dass f Addition in Multiplikation umwandelt.

$\boxed{\text{Es reicht, den Fall } \alpha = 1 \text{ zu untersuchen:}}$

Angenommen, $g'(x) = \alpha g(x)$ und $g(0) = 1$.

Wir normalisieren g zu f, definiert durch

$$f(x) := g\left(\frac{1}{\alpha} x\right).$$

Wir erhalten g zurück aus f, weil

$$g(x) = g\left(\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha \cdot x\right) = f(\alpha x).$$

Dann ist

$$f'(x) \underset{\text{Kettenregel}}{=} g'\left(\frac{1}{\alpha} x\right) \cdot \frac{1}{\alpha} \underset{\substack{\text{Wachstum} \\ \text{proportional} \\ \text{zum Wert}}}{=} \alpha\, g\left(\frac{1}{\alpha} x\right) \cdot \frac{1}{\alpha} = g\left(\frac{1}{\alpha} x\right) = f(x).$$

Das heißt, f erfüllt

$$f' = f.$$

Außerdem gilt

$$f(0) = g\left(\frac{1}{\alpha} 0\right) = g(0) = 1.$$

Angenommen, wir zeigen, so ein f erfüllt

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y).$$

Da $g(x) = f(\alpha x)$ ist, gilt auch

$$g(x+y) = f(\alpha(x+y)) = f(\alpha x + \alpha y)$$

$$= f(\alpha x) \cdot f(\alpha y)$$

$$= g(x) \cdot g(y)$$

Es reicht also, den Fall $\alpha = 1$ zu untersuchen.

$\boxed{\text{Wie sieht } f \text{ aus, wenn } f' = f \text{ und } f(0) = 1 \text{ ist?}}$

Es kann kein Polynom sein wie $f(x) = a_0 + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n$.
Dann wäre nämlich $f^{(n+1)} = 0$. $f^{(n+1)}$ ist die $(n+1)$-te Ableitung

Nehmen wir an, f ist eine Potenzreihe, d.h. f ist ein unendlich langes Polynom $f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n + \cdots$
Was sagt uns das über die Koeffizienten a_n?

$$f(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \cdots$$

$$f'(x) = 0 + 1 \cdot a_1 x^0 + 2 \cdot a_2 x^1 + 3 \cdot a_3 x^2 + \cdots + n \cdot a_n x^{n-1} + (n+1) a_{n+1} x^n + \cdots$$

Die Reihen f und f' sind identisch, genau dann, wenn sie dieselben Koeffizienten haben:

$$a_1 = a_0, \quad 2 \cdot a_2 = a_1, \quad 3 \cdot a_3 = a_2, \ldots, \quad (n+1) a_{n+1} = a_n$$

Das heißt, sie erfüllen die Rekurrenz

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}, \qquad a_0 = 1.$$

Die Rekurrenz $a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$, $a_0 = 1$.

ergibt die Werte

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{1}, \quad a_2 = \frac{1}{2 \cdot 1}, \quad a_3 = \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

und allgemein $a_n = \frac{1}{n!}$

Daher hat f die Form

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Diese Funktion ist bekannt als die Exponentialfunktion und wird oft notiert als exp.

Wie wir gesehen haben folgt ihre Form aus den Bedingungen

$$f' = f \quad \text{und} \quad f(0) = 1.$$

Die Exponentialfunktion erfüllt $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$

Wir starten mit der rechten Seite:

$$f(x)\cdot f(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k!)} x^k y^{n-k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = f(x+y)$$

Implikation 2) ⇒ 1)

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wenn gilt

$$f(x+y) = f(x)\cdot f(y) \quad \text{f.a. } x,y \in \mathbb{R}$$

dann gibt es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) = a^x \quad \text{f.a. } x \in \mathbb{Q}$$

Beweis: Wir haben bereits gezeigt, dass aus unseren Voraussetzungen folgt

$$f(0) = 1.$$

Wir schließen aus

$$1 = f(0) = f(x+(-x)) = f(x)\cdot f(-x),$$

dass

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Für natürliche Zahlen $m, n > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(m \cdot x) = f(\underbrace{x + \cdots + x}_{m\text{-mal}}) = \underbrace{f(x) \cdot \cdots \cdot f(x)}_{m\text{-mal}} = f(x)^m.$$

Aus $f(x) = f(\underbrace{\tfrac{x}{n} + \cdots + \tfrac{x}{n}}_{n\text{-mal}}) = f(\tfrac{x}{n})^n$ folgt

$$f\left(\frac{x}{n}\right) = \sqrt[n]{f(x)} = f(x)^{\frac{1}{n}}$$

Somit gilt für jede rationale Zahl $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, dass

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right)^m = \left(f(1)^{1/n}\right)^m = f(1)^{\frac{m}{n}}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

Bis jetzt haben wir gesehen, dass $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ impliziert

$$f(x) = f(0)^x \qquad \text{f.a. } x \in \mathbb{Q}$$

Im Spezialfall $f = \exp$, das heißt $f' = f$, haben wir

$$f(1) = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Die Zahl $\exp(1)$ wird oft einfach geschrieben als e.

Dann ist

$$(*) \qquad e^x = \exp(1)^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{Q}$$

Da exp differenzierbar ist (wir haben das immer von f angenommen),

ist f stetig auf $\mathbb{R}$, so dass die Gleichung $(*)$ auch für $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Wenn für g gilt $g'(x) = \alpha\, g(x)$, dann ist $g(x) = \exp(\alpha x)$, wie wir gesehen haben, das heißt

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n x^n}{n!}$$

Es ist $\exp(x) > 0$ für $x \geq 0$ und $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$, also gilt $\exp(x) > 0$ auch für $x < 0$.

Daraus folgt $\exp'(x) = \exp(x) >$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Also ist exp streng monoton wachsend (strictly monotonic) und hat eine Umkehrfunktion (inverse function).

Wir haben daher $\exp^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$.

Die Umkehrfunktion $\exp^{-1}$ heißt Logarithmus, geschrieben log.

Als Umkehrfunktion von exp erbt log die Eigenschaft

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y),$$

das heißt, log macht Produkte zu Summen.

Die bekannten Gesetze für Logarithmen und Potenzen können alle aus der gezeigten Darstellung hergeleitet werden.

3.4 Exponentiell verteilte Zufallsvariablen

Sei X eine Zufallsvariable, die angibt, wie lange es dauert, bis ein gegebenes radioaktives Atom zerfällt.

Es ist typisch für solch einen Zerfall, dass die Dauer der Zeit bis dass Ereignis stattfindet nicht davon abhängt, wie lange wir schon gewartet haben. Zu einem gewissen Grad trifft dies auch auf andere Prozesse zu, zum Beispiel auf das Warten auf

- den nächsten Kunden, der ein Geschäft betritt
- den nächsten Anruf
- das nächste Taxi

Sei X so eine Wartezeit. Unsere Annahme, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zeit nach einem Zeitpunkt s, falls das Ereignis nicht eingetreten ist, gleich der ursprünglichen ist, kann ausgedrückt werden als

$$(*) \quad \boxed{P[X > s+t \mid X > s] = P[X > t]}$$

Sei $F(t) := P[X \leq t]$ und $G(t) := P[X > t] = 1 - F(t)$

Dann gilt

$$G(0) = 1 - F(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad \lim_{t \to \infty} G(t) = 0$$

weil

$$G(t) = 1 - F(t) \qquad \text{und} \qquad \lim_{t \to \infty} F(t) = 1$$

Auf Grund der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit ist (*) äquivalent zu

$$P[X > t] = P[X > s+t \mid X > s]$$

$$= \frac{P[X > s+t \wedge X > s]}{P[X > s]} = \frac{P[X > s+t]}{P[X > s]}$$

Das heißt

$$G(t) = P[X > t] = \frac{P[X > s+t]}{P[X > s]} = \frac{G(s+t)}{G(s)}$$

und damit

$$G(s+t) = G(s) \cdot G(t).$$

Dies ergibt, mit $G(0) = 1$,

$$G(t) = a^t \quad \text{mit} \quad a = G(1)$$

und $a < 1$ wegen $\lim_{t \to \infty} G(t) = 0$

Wegen $a < 1$ gilt $\log a < 0$.

Sei $\lambda := -\log a$. Dann ist $a^t = e^{(\log a) t} = e^{-\lambda t}$.

Somit ist $G(t) = P[X > t] = e^{-\lambda t}$.

$$\Rightarrow F(t) = P[X \leq t] = 1 - P[X > t] = 1 - G(t)$$

$$= 1 - e^{-\lambda t}$$

ist die Verteilungsfunktion (cdf) von X

$$\Rightarrow f(t) = \frac{d}{dt}\, 1 - e^{-\lambda t} = \lambda e^{-\lambda t}$$

ist die Dichte von X.

Wir sagen, X ist exponentiell verteilt mit Rate λ, geschrieben

$$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

Wofür steht λ? Die Dimension von t ist „Zeit".

$\Rightarrow$ Die Dimension von λ ist Zeit^{-1},

d.h. λ ist eine Häufigkeit (frequency) oder Rate

In Kapitel 2 haben wir schon berechnet:

$$E[X] = \int_0^\infty t \cdot e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda}$$

$$E[X^2] = \int_0^\infty t^2 \cdot e^{-\lambda t}\, dt = \frac{2}{\lambda^2}$$

$\frac{1}{\lambda}$ ist die durchschnittliche Wartezeit

λ ist die durchschnittliche Zahl von Ereignissen pro Zeiteinheit

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Somit gilt $\mu = \frac{1}{\lambda}$ $\sigma = \frac{1}{\lambda}$

Mailboxen

Wir nehmen an, dass die Ankunft von E-Mails durch eine Exponentialverteilung modelliert werden kann. Das heißt, es gibt eine Rate $\lambda > 0$, so dass die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine Zeit t auf die nächste Mail zu warten, gleich $e^{-\lambda t}$ $(= G(t))$ ist.

Angenommen, es gibt n Personen mit einer Mailbox und die Ankunftsrate der i-ten Mailbox ist λ_i.

Wir nehmen auch an, dass die Wartezeiten für verschiedene Mailboxen voneinander unabhängig sind.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass während der nächsten Zeitdauer t bei keiner der n Mailboxen eine Nachricht eingeht?

Sei X_i die Wartezeit für die i-te Mailbox, $X_i \sim Exp(\lambda_i)$

Die Wahrscheinlichkeit, dass bis Zeitpunkt t keine Mail in Box i eintrifft, ist $P[X_i > t] = e^{-\lambda_i t}$ $= G_i(t)$

Die W.keit, dass bis t bei keiner Box etwas eintrifft, ist

$$P[X_1 > t \wedge \dots \wedge X_n > t]$$
$$= P[X_1 > t] \cdot P[X_2 > t] \cdot \dots \cdot P[X_n > t]$$

Unabhängigkeit der X_i

$$= e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} \cdot \dots \cdot e^{-\lambda_n t}$$

$G_1(t) \cdot G_2(t) \cdot \dots \cdot G_n(t)$

$$= e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) t}$$

> **Satz 60.** Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige ZVen, $X_i \sim Exp(\lambda_i)$.
> Dann gilt:
> $$\min(X_1, \dots, X_n) \sim Exp(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$$

3.2 Poisson-Verteilung

Die Poisson-Verteilung modelliert eine Folge von Ereignissen mit den folgenden Charakteristika:

- die Zeiten zwischen zwei aufeinander folgenden Ereignissen ist exponentialverteilt mit Rate λ
- die Zeiten zwischen zwei Ereignissen sind unabhängig voneinander

Wir sind daran interessiert, wie viele Ereignisse in einer Zeiteinheit geschehen (von der Länge, auf die sich die Rate λ bezieht).

Die Poisson-Verteilung liefert uns die Wahrscheinlichkeit, dass exakt k Ereignisse pro Zeiteinheit stattfinden.

Um die Poisson-Verteilung anzuwenden, müssen wir λ kennen und sicherstellen, dass die zu Grunde liegenden Annahmen zutreffen.

Beispiele: Es sind im Wesentlichen dieselben wie für die Exponentialverteilung. Die Poisson-Verteilung beantwortet Fragen über die Zahl der

- Kunden, die pro Stunde an einem Nachmittag ein Geschäft betreten
- Emails, die pro Minute auf einem Mail-Server eintreffen
- Soldaten, die pro Jahr durch den Huftritt eines Pferdes umkommen (klassische Anwendung in Deutschland um 1900)

Ob die Annahmen erfüllt sind kann überprüft werden durch

Messen der durchschnittlichen Wartezeit T

Überprüfen, ob die Wartezeiten nach $Exp(\lambda)$ verteilt sind.

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige exponentiell verteilte ZVen mit Rate λ. Wir interpretieren die X_i als aufeinander folgende Wartezeiten:

X_1 ist die Zeit, bis das erste Ereignis eintritt

X_2 ist die darauffolgende Zeit, bis das zweite Ereignis eintritt

usw.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau k Ereignisse im Zeitintervall $[0,1]$ eintreten?

(zum Beispiel während einer Stunde, eines Tages, usw.?)

Dies Problem betrifft die Summe von unabhängigen und identisch verteilten (i.i.d.) Exp(λ)-ZVen.

Für gegebene X_i, sei

$$S_k := \sum_{i=1}^{k} X_k$$

Summe der Wartezeiten für die ersten k Ereignisse

und sei

$$N := \underset{k}{\operatorname{argmax}} \, (S_k \leq 1)$$

Das maximale k, so dass k Ereignisse in einer Zeiteinheit stattfinden.

das heißt, N ist die maximale Zahl aufeinander folgender X_i, beginnend mit $i=1$, deren Summe nicht hinausgeht über 1.
Man beachte, dass N diskret ist.

Wie groß ist

$$P[N=k], \quad k=0,\dots,k,\dots \, ?$$

Wahrscheinlichkeit, dass exakt k Ereignisse in einer Zeiteinheit stattfinden

Bemerkung: $N=k \iff S_k \leq 1$ und $X_{k+1} \geq 1 - S_k$

Idee: Sei f die Dichte von X_{k+1} und f_k von S_k.

Dann gilt:

- $f(s) \cdot f_k(t)$ ist die gemeinsame Verteilung von X_{k+1} und S_k

- $$P[N=k] = P[S_k \leq 1, X_{k+1} > 1 - S_k]$$
  $$= \boxed{\int_0^1 \int_{1-t}^{\infty} f(s) \cdot f_k(t) \, ds \, dt}$$

Beachte:
- $S_k \geq 0$
- $X_{k+1} \geq 0$
- S_k, X_{k+1} unabh.

Wir wissen: $f(s) = \lambda e^{-\lambda s}$ Aber was ist f_k ?

Wir haben in Kapitel 2 gezeigt:

$$X, Y \text{ unabh.}, \quad X \sim f, \quad Y \sim g \implies X+Y \sim f * g$$

Die Dichte der Summen unabh. ZVen ist die Faltung der Dichten

Was ist f_k?

- $f_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

- $$\begin{aligned} f_2(t) &= (f_1 * f_1)(t) = \int_0^t f_1(s)\, f_1(t-s)\, ds \\ &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \cdot \lambda e^{-\lambda(t-s)}\, ds \\ &= \lambda^2 \int_0^t e^{-\lambda(s+t-s)}\, ds \\ &= \lambda^2 \int_0^t e^{-\lambda t}\, ds = \lambda^2 e^{-\lambda t} \int_0^t ds \\ &= \lambda^2 t\, e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} f_3(t) &= (f_2 * f_1)(t) \\ &= \int_0^t \lambda^2 s\, e^{-\lambda s} \cdot \lambda e^{-\lambda(t-s)}\, ds \\ &= \lambda^3 e^{-\lambda t} \int_0^t s\, ds = \lambda^3 \frac{t^2}{2} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

- $$f_k(t) = \lambda^k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \sim S_k$$

f_k ist die Dichte einer k-fachen Summe von unabhängigen identisch verteilten (u.i.v.) exponentiellen ZVen mit Rate λ

... auch genannt Dichte der Gamma-Verteilung $\Gamma(k, \frac{1}{\lambda})$

Wir rechnen:

$$P[N=k] = P[S_k \leq 1 \wedge X_{k+1} > 1 - S_k]$$

$$= \int_0^1 f_k(t) \left(\int_{1-t}^{\infty} f(s)\, ds \right) dt$$

$$= \int_0^1 \lambda^k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \int_{1-t}^{\infty} \lambda e^{-\lambda s}\, ds\, dt$$

$$= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \int_0^1 t^{k-1} e^{-\lambda t} \left[-e^{-\lambda s} \right]_{1-t}^{\infty} dt$$

$$= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \int_0^1 t^{k-1} e^{-\lambda t} e^{-\lambda(1-t)}\, dt$$

nächste Seite →

$$P[N=k] = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \int_0^1 t^{k-1} e^{-\lambda t} e^{-\lambda(1-t)}\, dt$$

$$= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \int_0^1 t^{k-1} e^{-\lambda}\, dt$$

$$= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \int_0^1 t^{k-1}\, dt \; e^{-\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \left[\frac{t^k}{k} \right]_0^1 e^{-\lambda} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Dies ist die W.keitsfunktion der Poisson-Verteilung mit Rate λ, $\mathrm{Pois}(\lambda)$

Beispiel 56: Angenommen, im Durchschnitt gibt es pro Woche drei Unfälle auf der Autobahn zwischen Trient und Bozen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es diese Woche mindestens einen Unfall gibt?

Sei $\mathcal{U}$ die Anzahl der Unfälle in allen möglichen Wochen.

Wir nehmen an, die Zahl der Unfälle ist Poisson-verteilt.

Bei drei Unfällen pro Woche ist $\lambda = 3$, also $\mathcal{U} \sim \text{Pois}(3)$.

Im Allgemeinen ist

$$P[m \le \mathcal{U} \le n] = \sum_{k=m}^{n} P[\mathcal{U}=k] = \sum_{k=m}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Hier haben wir

$$\begin{aligned} P[\mathcal{U} \ge 1] &= 1 - P[\mathcal{U} \le 0] = 1 - P[\mathcal{U} = 0] \\ &= 1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = 1 - e^{-\lambda} = 1 - e^{-3} \end{aligned}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es diese Woche mindestens fünf Unfälle gibt?

$$P[\mathcal{U} \ge 5] = 1 - P[\mathcal{U} \le 4] = 1 - \sum_{k=0}^{4} \frac{3^k}{k!} e^{-3}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es während zwei Wochen mindestens acht Unfälle gibt?

Die Modellierung ändert sich:

- neue Zeiteinheit: 2 Wochen statt 1
- neue Rate: 6 pro 2 Wochen
- neue ZV $\mathcal{U}_2$ (= # Unfälle in 2 Wochen) $\sim \text{Pois}(3+3) = \text{Pois}(6)$

Also:

$$P[\mathcal{U}_2 \geq 8] = 1 - P[\mathcal{U}_2 \leq 7]$$
$$= 1 - \sum_{k=0}^{7} \frac{6^k}{k!} e^{-6}$$

Erwartungswert von Pois(λ)

Sei $\mathcal{X} \sim \text{Pois}(\lambda)$. Dann ist

$$E[\mathcal{X}] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P[\mathcal{X} = k]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda}$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{\lambda} e^{-\lambda} = \lambda$$

Das Ergebnis ist plausibel: $\mathcal{X}$ hat die Rate von durchschnittlich λ Ereignissen pro Zeiteinheit.

Wenn wir die Ereignisse pro Zeiteinheit zählen, sollten wir im Durchschnitt λ Ereignisse beobachten.

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \right)$$

$$= \lambda e^{-\lambda} (\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda$$

Das ergibt

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Also haben wir

$$\mu = \lambda \quad \text{und} \quad \sigma^2 = \lambda$$

Poisson- und Binomialverteilung

Sei $X \sim B(n,p)$

Mittelwert von $B(n,p) = n \cdot p$

Mittelwert von $Pois(\lambda) = \lambda$

Betrachte λ als $n \cdot p \Rightarrow p = \frac{\lambda}{n}$ *

$$P[X=k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

* Idee: Wahrscheinlichkeit p (klein!!), dass ein Auto einen Unfall hat

Es gibt viele Autos, n (groß!!)

$\Rightarrow$ Unfallrate $= n \cdot p = \lambda$

$$P[\mathcal{X}=k] = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

$$= \underbrace{\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k}}_{\to 1}\;\frac{\lambda^k}{k!}\;\frac{\overbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}^{\to e^{-\lambda}}}{\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}_{\to 1}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda}{n} = 0$

Wir sehen:

$$P[\mathcal{X}=k] \approx \frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda}$$

oder

$$B(n,p) \approx \mathrm{Pois}(np)$$

wenn p klein und n groß ist.

Beispiel 58: Die Zahl der Kunden eines Bar betrage durchschnittlich 4 je Stunde. Wie groß ist die W.keit, dass in 2 Stunden nicht mehr als 3 kommen?

Wir überlegen intuitiv wie folgt:

Sei $\mathcal{C}_1 :=$ # Kunden / Stunde $\sim \mathrm{Pois}(4)$

$\Rightarrow$ $\mathcal{C}_2 :=$ # Kunden / 2 Stunden $\sim \mathrm{Pois}(4+4) = \mathrm{Pois}(8)$

$$\Rightarrow \quad P[\mathcal{C}_2 \leq 3] = e^{-8}\sum_{i=0}^{3}\frac{8^i}{i!}$$

Ist das richtig?

Die Poisson-Verteilung ist reproduktiv in folgendem Sinn:

Satz: Seien $X_1 \sim \mathrm{Pois}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \mathrm{Pois}(\lambda_2)$, X_1, X_2 unabhängig
Dann gilt:
$$X_1 + X_2 \sim \mathrm{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Beweis (intuitiv): X_1 zählt Ereignisse vom Typ 1, mit Rate λ_1
X_2 zählt Ereignisse vom Typ 2, mit Rate λ_2.
Diese Ereignisse geschehen unabhängig voneinander.

Mit welches Rate geschehen beide Typen von Ereignissen, wenn wir sie gleichzeitig zählen?

Mit der Rato $\lambda_1 + \lambda_2$.

Beweis (formal): Seien X_1, X_2 unabh., $X_1 \sim \mathrm{Pois}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \mathrm{Pois}(\lambda_2)$
Sei $Y := X_1 + X_2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
P[Y=k] &= \sum_{j=0}^{k} P[X_1 = j, X_2 = k-j] \\
&= \sum_{j=0}^{k} P[X_1 = j] \cdot P[X_2 = k-j] \\
&= \sum_{j=0}^{k} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^j}{j!} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda_2^{k-j}}{(k-j)!} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j\,(k-j)!} \lambda_1^j \lambda_2^{k-j} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{k!} \frac{k!}{j\,(k-j)!} \lambda_1^j \lambda_2^{k-j} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda_1^j \lambda_2^{k-j} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}
\end{aligned}$$

Klassen von Poisson-verteilten Ereignissen (Ausdünnung/Thinning)

Ein Geschäft habe im Durchschnitt λ Kunden pro Stunde.
Angenommen, der Anteil der weiblichen Kunden ist p, $0 \le p \le 1$, und der Anteil der männlichen Kunden ist $(1-p)$.
Außerdem sei die Ankunft weiblicher Kunden unabhängig von der Ankunft männlicher Kunden.

Wie ist die Zahl der weiblichen Kunden pro Stunde verteilt?

Antwort (intuitiv):

λ Kunden pro Stunde
Anteil weiblicher Kunden $= p$
$\Rightarrow$ $p\lambda$ weibl. Kunden pro Stunde
$\Rightarrow$ Verteilung $\sim \text{Pois}(p\lambda)$ (Beweis im Skript)

Beispiel: Tom erhält während eines Arbeitstages im Schnitt 3 Emails pro Stunde. Ein Drittel davon sind an ihn persönlich gerichtet, zwei Drittel gehen an Listen.
Wir nehmen an, die Ankunft der Emails ist unabhängig voneinander.
Die Ankunft von persönlichen Emails ist unabhängig von der Ankunft der Listen-Emails.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Tom mehr als 2 persönliche Emails in 2 Stunden erhält?

Wir nehmen an, die Ankunftszeiten der Emails sind exponentiell verteilt. Die Rate ist dann $\lambda = 3$.
Die Zahl der Emails pro Stunde ist dann Poisson-verteilt, auch mit $\lambda = 3$.
Die Zahl der Emails je 2 Stunden ist dann $\text{Pois}(2\lambda)$-verteilt.
Ein Drittel der Mails ist persönlich. Also ist die Rate $\frac{2\lambda}{3} = 2$.
Die Wahrscheinlichkeit ist dann $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2^k}{k!} e^{-2}$.

Beispiel:

In einer Stadt gibt es pro Jahr 1000 Einsätze von Notärzten.
Ein Einsatz dauert ca. 2 Stunden.
Die Häufigkeit der Einsätze ist unabhängig von der Tageszeit und Jahreszeit.
Die Stadt möchte sicherstellen, dass mit W.keit $\geq 99{,}9\,\%$ immer ein Notarzt verfügbar ist.
Wie viele Ärzte müssen zu jedem Zeitpunkt in Bereitschaft sein?

Wir betrachten dies als ein Problem von Zeiteinheiten von 2 Stunden (= Dauer eines Einsatzes).
Die Rate je 2 Stunden ist

$$\lambda = \frac{1000}{365 \cdot \frac{24}{2}} = 0{,}23$$

Wir nehmen also an, dass $N \sim \text{Pois}(0{,}23)$

Seien K Ärzte in Bereitschaft.

Damit mindestens ein Arzt verfügbar ist, darf es nicht mehr als $K-1$ Notfälle geben.

Sei N die Anzahl der Notfälle. Wir suchen K so, dass

$$P[N > K-1] \leq 0{,}01 ,$$

bzw.

$$P[N \leq K-1] \geq 0{,}99$$

Dabei nehmen wir an, dass $N \sim \text{Pois}(0{,}23)$

Wir sehen mit R, dass

$$\text{ppois}(2,.23) = 0{,}9982917$$

$$\text{ppois}(3,.23) = 0{,}9999092$$

Also reichen 4 Ärzte aus.