5 Erwartungswert, Varianz und das LOTUS-Theorem[1]

5.1 Kosten einer Telefonreparatur

Die Zeit, die für die Reparatur eines Mobiltelefons benötigt wird, ist eine Zufallsvariable, deren Wahrscheinlichkeitsdichte, in Stunden ausgedrückt, gegeben sei durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Kosten der Reparatur hängen von der benötigten Zeit ab und sind gleich $40 + 30\sqrt{x}$, wenn die Zeit x ist. Berechnen Sie die erwarteten Kosten für die Reparatur eines Mobiltelefons.

Hint: Überlegen Sie, welche Eigenschaften des Erwartungswerts bei der Rechnung von Nutzen sein könnten.

5.2 Berechnung der Varianz

Sei $\mathcal{X}$ eine Zufallsvariable mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} x^2(2x + 3/2) & \text{falls } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Betrachten Sie nun die Zufallsvariable $\mathcal{Y} = \frac{2}{\mathcal{X}} + 3$. Bestimmen Sie die Varianz von $\mathcal{Y}$.

Hinweis: Überlegen Sie, welche Eigenschaften der Varianz bei der Bestimmung der Varianz von $\mathcal{Y}$ von Nutzen sein könnten.

5.3 Erwartungswert von Potenzen gleichmäßig verteilter Variablen

Nehmen wir an, $\mathcal{X}$ ist gleichmäßig auf dem Intervall $(0, 1)$ verteilt. Dann hat $\mathcal{X}$ die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie den Erwartungswert $E[\mathcal{X}^n]$, für $n \geq 1$, und tun Sie dies auf zwei verschiedenen Wegen:

[1] LOTUS ist ein Akronym für „Law Of The Unconscious Statistician“.

1. indem Sie die Dichte von $\mathcal{X}^n$ ermitteln und dann die Definition des Erwartungswerts anwenden,
2. indem Sie Satz 39 verwenden (das „LOTUS-Theorem“).

5.4 Exponentiell verteilte Zufallsvariablen

In dieser Aufgabe geht es um die Verteilung von Zufallsvariablen, die Funktionen exponentiell verteilter Variablen sind.

1. Die Zufallsvariable $\mathcal{X}$ sei exponentiell mit Rate λ verteilt, d.h. die Dichte ihrer Verteilung ist

   $$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Sei $g(x) = c \cdot x$ für ein $c > 0$. Was sind Verteilungsfunktion und Dichte der Variablen $g(\mathcal{X})$?

2. Seien $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ unabhängige Zufallsvariablen, wobei jedes $\mathcal{X}_i$, $i = 1, 2$, exponentiell mit der Rate λ_i verteilt sei. Was sind Verteilungsfunktion und Dichte der Variablen $\min(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$?

   Hinweis: Statt der Verteilungsfunktionen $F_{\mathcal{X}_i}$, mit $F_{\mathcal{X}_i}(x) = 1 - e^{-\lambda_i x}$, betrachte man die Funktionen $1 - F_{\mathcal{X}_i}$, für die gilt $(1 - F_{\mathcal{X}_i})(x) = e^{-\lambda_i x}$.