Dichten und Erwartungswerte

Anleitung: Sie haben zwei Wochen Zeit, bis zum 25. November 2020, 23:55 Uhr, um Ihre Lösungen zu diesen Aufgaben über OLE einzureichen.
Sie können Ihre Lösungen mit einem Textverarbeitungssystem (Word, Latex) oder per Hand ausarbeiten. Es ist möglicherweise einfacher, wenn Sie Ihre Antworten mit der Hand schreiben, da sie wahrscheinlich symbolische Rechnungen mit Brüchen, Potenzen und Integralen enthalten. Wenn Sie handschriftliche Lösungen einreichen, bemühen Sie sich, deutlich zu schreiben und Ihre Antworten so zu strukturieren und zu kommentieren, dass sie lesbar sind. Wenn Sie mit der Hand schreiben, reichen Sie die Antwort als gescanntes PDF-Dokument ein. (Reichen Sie kein Foto, sondern einen Scan ein, denn Fotos sind in der Regel nur schwer zu lesen).
Jede Frage hat eine Gewichtung, die in Punkten ausgedrückt wird. Für Ihre Antwort erhalten Sie eine Note auf einer Skala von 0 bis 30. Die Gewichtung bestimmt, wie viel die Note zur Gesamtnote für die Hausarbeiten und damit zur Endnote beiträgt. Beachten Sie, dass wir bei der Berechnung der Endnote für jede Frage das Maximum aus der Note für die Frage und der Prüfungsnote bilden. Es ist daher kein großer Verlust, wenn Sie eine niedrige Note für eine Frage erhalten: (i) die Note für die Frage kann durch die Prüfungsnote ausgeglichen werden, und (ii) sie hat keinen Einfluss auf die Noten für die anderen Fragen.
Ihre Arbeit soll Ihre eigene Leistung darstellen. Wir erwarten jedoch nicht von Ihnen, dass Sie allein arbeiten. Es ist in Ordnung, die Aufgaben zu besprechen und gemeinsam nach Lösungen zu suchen, aber jeder Student muss seine Lösungen separat aufschreiben und einreichen. Es gehört zum guten akademischen Standard, Mitarbeiter zu erwähnen. Wenn Sie also mit anderen zusammengearbeitet haben, geben Sie bitte deren Namen an.

1 Gemeinsame Dichte auf einem Rechteck

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte von $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x^2 + \frac{xy}{2}) & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

1. Bestimmen Sie die Konstante c.

2. Berechnen Sie die marginale Dichte von $\mathcal{X}$.

3. Berechnen Sie die marginale Dichte von $\mathcal{Y}$.

4. Sind $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ unabhängig?

5. Bestimmen Sie $P[\mathcal{X} > \mathcal{Y}]$.

(Gewicht: 20% dieser Arbeit)

2 Gemeinsame Dichte auf einem Dreieck

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte von $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ sei

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & 0 < x < y, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

1. Berechnen Sie die marginale Dichte von $\mathcal{X}$.

2. Berechnen Sie die marginale Dichte von $\mathcal{Y}$.

3. Sind $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ unabhängig?

4. Bestimmen Sie $P[\mathcal{X} > \mathcal{Y}]$.

(Gewicht: 10% dieser Arbeit)

3 Erwartungswert

Die Dichte von $\mathcal{X}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Angenommen der Erwartungswert von $\mathcal{X}$ ist $E(\mathcal{X}) = 3/5$, was sind dann a und b?

(Gewicht: 10% dieser Arbeit)

4 Spieldauer

Angenommen, zwei Mannschaften A und B spielen eine Reihe von Spielen. Eine Reihe endet, wenn eine der beiden Mannschaften n Spiele gewonnen hat. Nehmen wir weiter an, dass (i) das Gewinnen eines Spiels unabhängig ist vom Gewinnen eines anderen Spiels, (ii) für Team A die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen p ist und (iii) ein Spiel nie unentschieden ausgeht.

1. Wie groß ist der Erwartungswert für die Länge einer Serie von Spielen für $n = 2$?

2. Für welches p ist diese Zahl maximal und für welches minimal?

(Gewicht: 20% dieser Arbeit)

5 Die wahre Meinung der Metereologen

Jede Nacht veröffentlichen verschiedene Meteorologen die „Wahrscheinlichkeit", dass es am nächsten Tag regnen wird. Um zu beurteilen, wie genau die Vorhersagen dieser Experten sind, bewerten wir jeden von ihnen wie folgt: Wenn ein Meteorologe sagt, dass es mit der Wahrscheinlichkeit p regnen wird, dann erhält er eine Punktzahl von

$$\begin{array}{ll} 1-(1-p)^2 & \text{wenn es regnet} \\ 1-p^2 & \text{wenn es nicht regnet.} \end{array}$$

Wir zeichnen diese Punkte über einen längeren Zeitraum auf und der Meteorologe mit der höchsten Durchschnittspunktzahl erhält dann einen Preis für die besten Vorhersagen. Nehmen wir nun an, ein Meteorologe weiß, wie wir Punkte vergeben, und möchte den Erwartungswert für seine Punktzahl maximieren. Wenn dieser Meteorologe wirklich glaubt, dass es morgen mit der Wahrscheinlichkeit p^* regnen wird, welchen Wert p sollte er dann veröffentlichen, um die erwartete Punktzahl zu maximieren?

(Gewicht: 20% dieser Arbeit)

6 Maximum und Minimum von gleichverteilten Zufallsvariablen

Seien $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n$ unabhängige Zufallsvariablen, von denen jede die folgende Dichte hat:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $\mathcal{M}_{ax} = \max(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n)$.

1. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F von $\mathcal{M}_{ax}$.

   Hinweis: Das Maximum von $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n$ ist $\leq$ einer Zahl x, wenn *alle* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n \leq x$ sind.

2. Was ist die Dichte f von $\mathcal{M}_{ax}$?

3. Was ist der Erwartungswert von $\mathcal{M}_{ax}$?

4. Beantworten Sie die analogen Fragen für das Minimum $\mathcal{M}_{in}$.

(Gewicht: 20% dieser Arbeit)