PTS Lecture Notes

Thu, 9 Nov 2021

Summen stetig verteilten unabh. ZVen

Seien X, Y stetig verteilt, mit Dichten f, g

$Z := X + Y$ Etwa: Wartezeiten

Was ist die Dichte von Z?

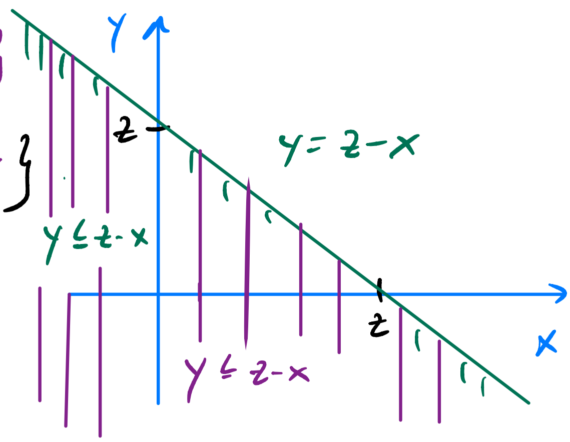
= Ableitung der Verteilungsfunktion von Z

$$F_Z(z) = P[Z \le z] = P[X + Y \le z]$$

$F_Z(z)$ ist das Integral der gemeinsamen Dichte von X, Y über dem Bereich

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \le z\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid y \le z - x\}$$



$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f(x) \cdot g(y) \, dy \, dx$$

Formel für Verteilung

Dichte der Summen-ZV: Was ist $\frac{d}{dz} F_Z(z)$?

$$\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-x} f(x)\cdot g(y)\,dy\,dx$$

Vertausche Integration und Ableitung!

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dz}\left(\int_{-\infty}^{z-x} f(x)\,g(y)\,dy\right)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\frac{d}{dz}\left(\underbrace{\int_{-\infty}^{z-x} g(y)\,dy}_{G(z-y)}\right)dx$$

Verteilung von y, G

$G(y) = \int_{-\infty}^{y} g(u)\,du$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\frac{d}{dz}\,G(z-x)\right)dx$$

$$= \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,g(z-x)\,dx}$$

$$= (f*g)(z)$$

Faltung (convolution) von f und g

Satz: Sind X, Y unabh. stetig verteilte ZVen, mit Dichten f, g, dann hat die Summe $X+Y$ als Dichte die Faltung $f*g$

$$(f*g)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,g(z-x)\,dx$$

2.5 Eigenschaften des Erwartungswert

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \underbrace{p(x_i)}$$

$$- " - = \int_{-\infty}^{\infty} x \underbrace{f(x)\, dx}$$

gewichtetes Mittel der Werte von X

Sei X ZV, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $\Rightarrow$ $g(X)$ ist auch eine ZV

Beispiel: W Würfel, $g(x) = x^2$

$g(W) = W^2$ ist Quadrat der Würfelzahl

Werte	W.keiten
1	1/6
4	1/6
9	1/6
16	1/6
25	1/6
36	1/6

$$E[W^2] =$$
$$= 1 \cdot 1/6 + 4 \cdot 1/6 + 9 \cdot 1/6 + 16 \cdot 1/6 + 25 \cdot 1/6 + 36 \cdot 1/6$$
$$= \frac{1}{6}(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36)$$
$$= \frac{1}{6} 91 = \frac{91}{6} = \sum_{i=1}^{6} i^2 \cdot \frac{1}{6} = \sum_{i=1}^{6} g(i) \cdot P_W(i)$$

Beispiel: Würfel mit Zahlen $-3, -2, -1, 1, 2, 3$

Sei X die gewürfelte Zahl $\Rightarrow E[X] = 0$

Sei $Z := X^2$. $E[Z] = ?$

1) Bestimme die W.keitsfkt von Z und berechne $E[Z]$

Werte	W.keiten
1	$1/6 + 1/6 = \frac{1}{3}$
4	$1/6 + 1/6 = \frac{1}{3}$
9	$1/6 + 1/6 = \frac{1}{3}$

$$E[Z] = 1 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 9 \cdot \frac{1}{3}$$
$$= \frac{1}{3} 14 = \frac{14}{3}$$

2) Berechne das gewichtete Mittel (Gewichte = W.keiten der Werte von X) der Werte $g(x_i)$

$$E[X^2] = (-3)^2 \cdot \frac{1}{6} + (-2)^2 \cdot \frac{1}{6} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{6}$$
$$+ 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6}$$
$$= \frac{14}{3}$$

3) Wir sehen

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i) \cdot P_X(x_i)$$

Satz 39 ("Law of the Unconscious Statistician", LOTUS)   LOTUS Theorem

Seien X ZV, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $E[g(X)] = \sum_i g(x_i) \cdot p_X(x_i)$, X diskret
- $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) \, dx$ X stetig, f_X Dichte von X

Anwendungen des LOTUS-Theorems (1)

Lineare Transformationen von X: $g(x) = ax + b$

$$E[aX+b] \overset{?}{=} a \cdot E[X] + b$$

$$E[g(X)] \overset{\text{LOTUS}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) \, dx \qquad X \sim f$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b) \cdot f(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} a \cdot x \cdot f(x) \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} b \cdot f(x) \, dx$$

$$= a \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \, dx + b \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$$

$$= a \cdot E[X] + b \cdot 1$$

Etwa: Umrechnung von Maßstäben
Celsius → Fahrenheit
→ Kelvin

Anwendung 2

X, Y zVen. Dann ist

$$E[X+Y] \overset{?}{=} E[X] + E[Y]$$

Lotus gilt auch für 2-dimensionale W.keitsfkt.en und Dichten, etwa:

$f(x,y)$ sei gemeinsame Dichte von X, Y,
$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Dann ist

$$E[g(X,Y)] = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} g(x,y) \cdot f(x,y) \, d(x,y)$$

$E[g(X,Y)]$ $\quad g(x,y) = x+y$

$$E[X+Y] \overset{\text{Lotus}}{=} \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} (x+y) \cdot f(x,y) \, d(x,y)$$

$$= \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} x \, f(x,y) \, d(x,y) + \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} y \, f(x,y) \, d(x,y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \, dy \right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \, dx \right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y) \, dy$$

$$= E[X] + E[Y]$$

Verallgemeinerung (Generalisation)

$$\boxed{E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]}$$

Beispiel: 2 Würfel W_1, W_2, $E[W_i] = \frac{7}{2}$

$\Rightarrow E[W_1 + W_2] = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7$

Beispiel: n-facher Münzwurf $E[\#\text{Kopf}] = ?$

$P[K] = p$, $P[Z] = 1-p$

Sei $X_i = 1$ gdw der i-te Wurf ist Kopf $E[X_i] = p$

Warum:

$E[X_i] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$

n Würfe: $E[\#\text{Köpfe}] = E\left[\sum_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$

$= \sum_{i=1}^{n} p = n \cdot p$

$E[X - Y] = E[X + (-1) \cdot Y]$

$= E[X] + E[(-1) \cdot Y]$

$= E[X] + (-1) \cdot E[Y]$

$= E[X] - E[Y]$

Erwartungswert von Produkten unabh. ZVen

Seien X, Y unabh., mit Dichten $X \sim f$, $Y \sim g$

Satz: $E[X \cdot Y] \overset{?}{=} E[X] \cdot E[Y]$ $g(x,y) = x \cdot y$

Wir rechnen

$$E[X \cdot Y] \overset{\text{Lotus}}{=} \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} (x \cdot y)\, f(x) \cdot g(y)\, d(x,y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f(x) \cdot g(y)\, dx\, dy$$

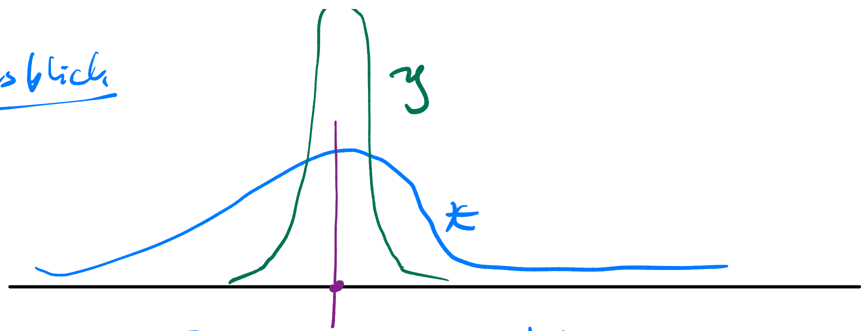
$$= \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot g(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx \right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot g(y) \cdot E[X]\, dy$$

$$= E[X] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot g(y)\, dy = E[X] \cdot E[Y]$$

Analog für diskret verteilte ZV.en.

Ausblick



$E[X] =$ Schwerpunkt

$= E[Y]$

Streuung der Werte von X: Varianz