4 Dichten, Erwartungswerte, Unabhängigkeit

4.1 Computer-Ausfall

Die Zeit in Stunden, die ein Computer funktioniert, bevor er ausfällt, sei eine stetige Zufallsvariable mit einer Wahrscheinlichkeitsdichte, die gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-x/100} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Computer zwischen 50 und 150 Stunden funktioniert, bevor er versagt?

   Hinweis: Beachten Sie, dass Sie zunächst λ so bestimmen müssen, dass f eine Dichte ist.

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Computer weniger als 100 Stunden funktioniert?

4.2 Erwarteter Rang bei einer Prüfung

Vier Männer und drei Frauen werden nach ihrer Punktzahl in einer Prüfung eingestuft. Wir nehmen an, dass die Teilnehmer alle unterschiedliche Noten erhalten und alle Rangfolgen gleich wahrscheinlich sind.

1. Sei $\mathcal{X}$ die Zufallsvariable, die den niedrigsten von einer Frau erreichten Rang angibt. Was ist die Wahrsscheinlichkeitsfunktion von $\mathcal{X}$?

   Hinweis: In Aufgabe 2.3 auf Übungsblatt 2 haben wir schon die Wahrscheinlichkeiten $P[\mathcal{X} = i]$ für $i = 1, \ldots, 7$ bestimmt.

2. Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(\mathcal{X})$.

4.3 Gemeinsame Verteilungen und Unabhängigkeit

Wir nehmen an, die Zufallsvariablen $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ haben die gemeinsame Dichtefunktion

$$f(x, y) = \begin{cases} c \cdot x \cdot y & 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

1. Berechnen Sie die Konstante c.

2. Berechnen Sie die marginalen Dichten $f_{\mathcal{X}}$ und $f_{\mathcal{Y}}$ von $\mathcal{X}$ beziehungsweise $\mathcal{Y}$.

3. Sind $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ unabhängig?

Betrachten Sie nun zwei andere Zufallsvariablen. Wir nehmen an, $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ haben die gemeinsame Dichte

$$g(x,y) = \begin{cases} c \cdot x \cdot y & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Überlegen Sie, in welcher Weise sich die beiden Szenarios unterscheiden: Wie sehen die Bereiche aus, in denen $f > 0$ und in denen $g > 0$ ist?

4. Berechnen Sie die Konstante c.

5. Berechnen Sie die marginalen Dichten $g_{\mathcal{X}}$ und $g_{\mathcal{Y}}$ von $\mathcal{X}$ beziehungsweise $\mathcal{Y}$.

6. Sind $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ unabhängig?

4.4 Summe unabhängiger Zufallsvariablen

Seien $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ zwei unabhängige Zufallsvariablen, die jede die folgende Dichte haben:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Es sei $\mathcal{Z} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ die Summe von $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$.

1. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $\mathcal{Z}$.

2. Bestimmen Sie die Dichte von $\mathcal{Z}$.

Sei $\mathcal{Z}_k$ die Summe von k unabhängigen Zufallsvariablen, die alle exponentiell mit Rate $\lambda = 1$ verteilt sind.

3. Bestimmen Sie die Dichte von $\mathcal{Z}_k$.