PTS Lecture Notes

Thu, 4 Nov 2021

Gemeinsame Dichte stetiger ZVen

X, Y stetig

Dichte $\quad f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f \geq 0$

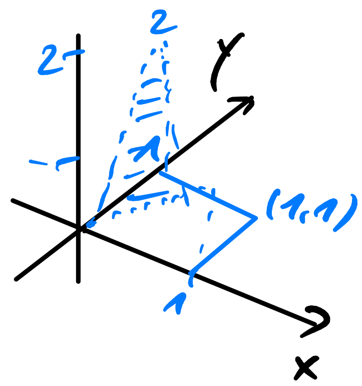
Für „verünftige" $C \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gilt

$$P[(X, Y) \in C] = \iint_{(x,y) \in C} f(x,y) \, d(x,y)$$

Volumen unter der Fläche von f über C

Beispiel: f gemeinsame Dichte von X, Y

$$f(x,y) = \begin{cases} c \cdot (x + 2y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Was ist c? Es muss gelten:

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(x,y) \, d(x,y) = 1$$

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(x,y) \, d(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \, dy} \, dx$$

Fkt. von x

$$= \int_0^1 \int_0^1 c \cdot (x + 2y) \, dy \, dx$$

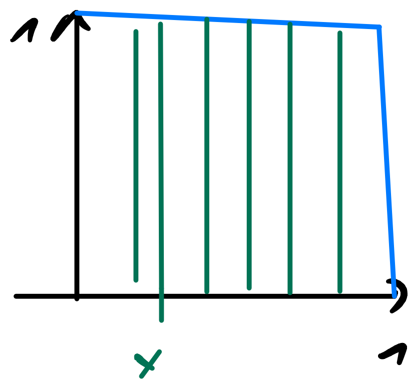
$$\int_0^1 \int_0^1 c\cdot(x+2y)\,\overset{\text{innen } y}{dy}\,\overset{\text{außen } x}{dx} = c\int_0^1\int_0^1 x+2y\,dy\,dx$$

$$= c\int_0^1 \left[xy + 2\frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx$$

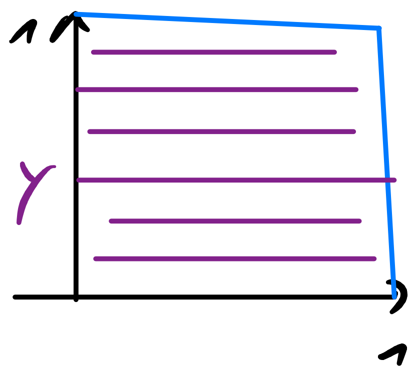
$$= c\int_0^1 x+1\,dx = c\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1$$

$$= c\left(\frac{1}{2}+1-0-0\right) = c\cdot\frac{3}{2}$$

Integration:
außen x
innen y



Integration:
außen y
innen x



$$\int_0^1\int_0^1 c\cdot(x+2y)\,dx\,dy$$

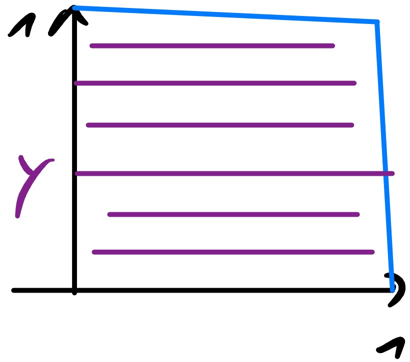
innen x $\quad$ außen y

$$\int_0^1 \int_0^1 c \cdot (x + 2y)\, dx\, dy$$

$$= c \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + 2yx \right]_0^1 dy = c \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + 2y \right) dy$$

$$= c \left[\frac{1}{2} y + 2 \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = c \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = c \cdot \frac{3}{2}$$

Integration:
außen y
innen x



Die Integrationsreihenfolge ist gleich:

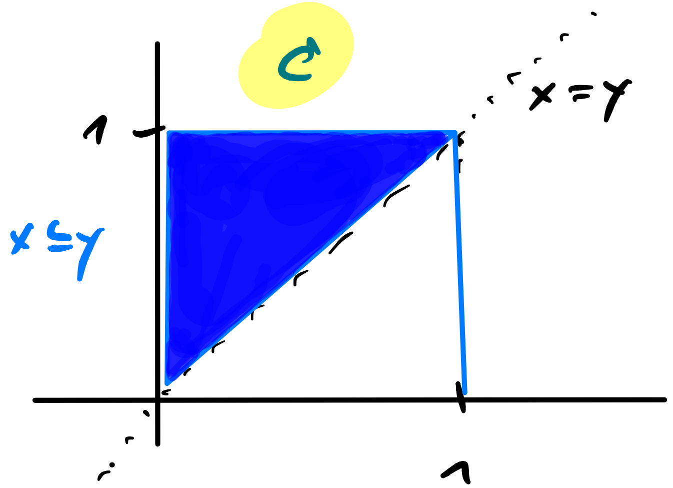
$$\iint x \, dx\, dy = \int \frac{x^2}{2}\, dy = \frac{x^2}{2} \cdot y$$

$$\iint x \, dy\, dx = \int xy \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot y$$

Beispiel: Gemeinsame Dichte von X, Y wie vorher:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}\cdot(x+2y), & 0 \le x,y \le 1 \\ 0 & \end{cases}$$

$$P[X \le Y] \stackrel{?}{=} \iint_C f(x,y)\, d(x,y)$$

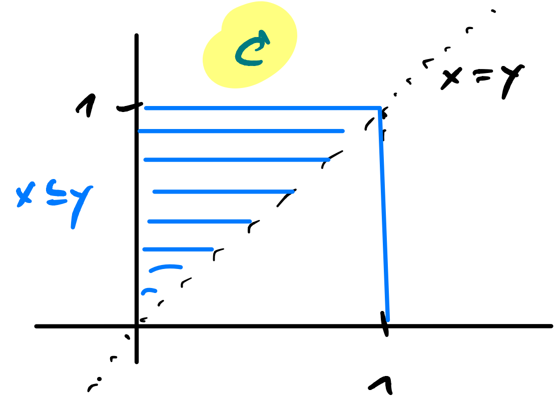


Auch hier: Integrationsreihenfolge ist gleich:

$$\int_0^1 \int_0^y f(x,y)\, dx\, dy$$

x innen

y außen

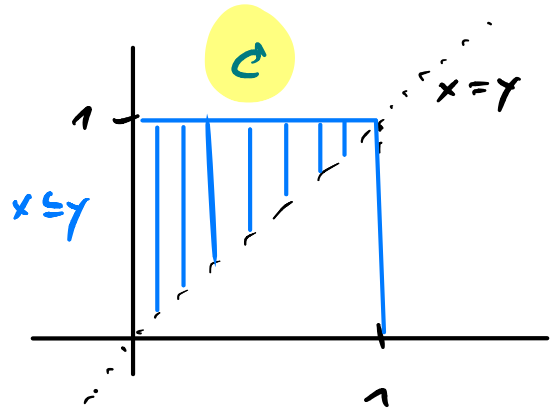


$$=$$

$$\int_0^1 \int_x^1 f(x,y)\, dy\, dx$$

x außen

y innen



Wir rechnen:

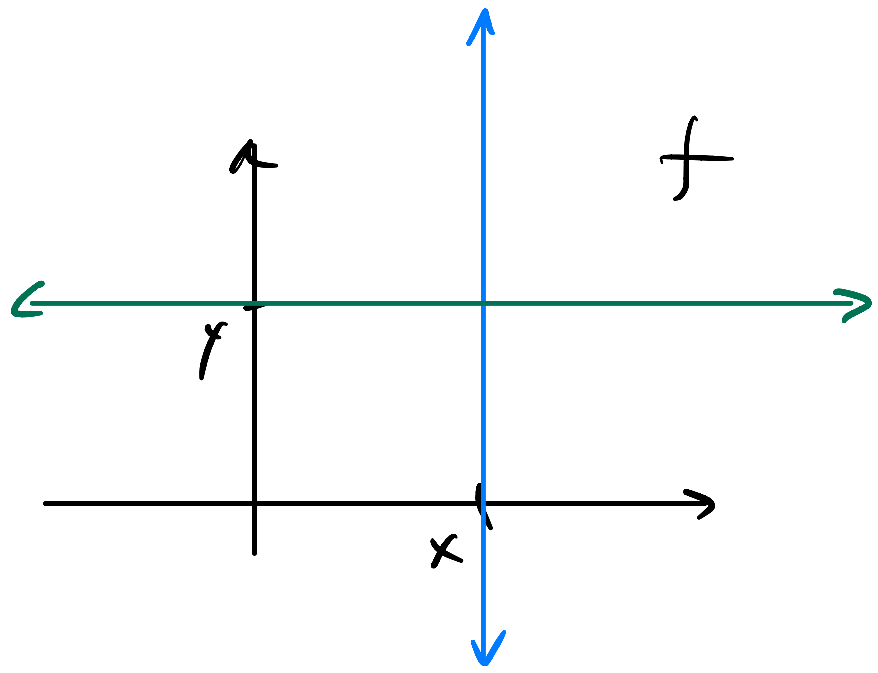
$$\int_0^1 \int_0^y f(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^y \frac{2}{3} \cdot (x + 2y)\, dx\, dy$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + 2yx \right]_{x=0}^{x=y} dy = \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{y^2}{2} + 2y^2 - 0 - 0\, dy$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{5}{2} y^2\, dy = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

Marginale Dichten: f sei gem. Dichte von X, Y



$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy$$

2.3 Unabhängige Zufallsvariablen

Ereignisse: $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ unabh. $\Leftrightarrow$ $P(\mathcal{E}\mathcal{F}) = P(\mathcal{E}) \cdot P(\mathcal{F})$

X, Y ZVen

Ereignisse, die durch X beschrieben werden können:

"$5 < X < 9$"   "$X \geq 2$"   "$X < 0$ oder $X > 2$"

Ereignisse, die durch Y beschrieben werden können:

"$Y \geq 75$"

X, Y unabhängig: gdw (genau dann wenn)

alle X-Ereignisse sind unabhängig von

allen Y-Ereignissen

Genauer:

Definition: X, Y unabh. gdw.

für alle "vernünftigen" $A, B \subseteq \mathbb{R}$ gilt

$$P[X \in A, Y \in B] = P[X \in A] \cdot P[Y \in B]$$

<u>Satz</u> X, Y sind unabhängig gdw

$$P[X \le a, Y \le b] = P[X \le a] \cdot P[Y \le b]$$

Folgerung 1: $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ diskret, mit gem. Wkeitsfkt. p

Dann: $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ unabh. gdw

$$\underbrace{p(x_i, y_j)}_{= P[\mathcal{X} = x_i,\ \mathcal{Y} = y_j]} = p_{\mathcal{X}}(x_i) \cdot p_{\mathcal{Y}}(y_j)$$

Folgerung 2: $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ stetig verteilt, mit gem. Dichte f

Dann: $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ unabh. gdw

$$f(x, y) = f_{\mathcal{X}}(x) \cdot f_{\mathcal{Y}}(y)$$

Summen unabhängiger ZV

Seien X, Y unabh. . Sei $Z = X + Y$. Was ist die Wkt./Dichte von Z?

Fall 1: X, Y diskret, mit möglichen Werten $\{0, \dots, n\}$

$$P[X=i] = p_i \qquad P[Y=j] = q_j$$

$$P[Z=2] = P[X+Y=2]$$

Disjunkte Ereignisse

$$= P[X=0, Y=2] + P[X=1, Y=1] + P[X=2, Y=0]$$

$$= P[X=0] \cdot P[Y=2] + \dots\dots + P[X=2] \cdot P[Y=0]$$

$$P[X+Y=k] = \sum_{i=0}^{k} P[X=i] \cdot P[Y=k-i]$$

Die Summe beider Werte ist k