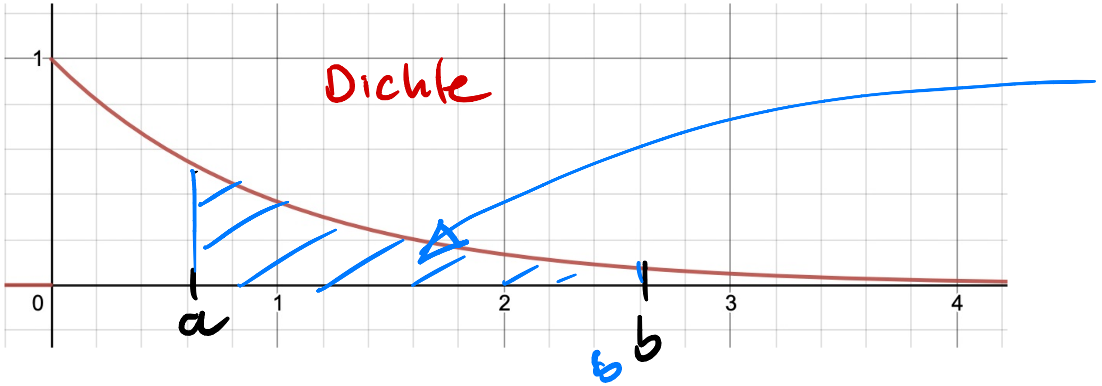
Beispiel: $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ $\quad F(x) = \,?$



$P[a \leq X \leq b]$

= Fläche unter der Kurve von f zwischen a und b

$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)\,dx$$

Y diskret: $P[a \leq Y \leq b] = \sum_{\substack{y \\ a \leq y \leq b}} p(y)$

Zusammenhang zwischen Verteilung F und Dichte f:

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx} P[X \leq x] = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = f(x)$$

Sei $X \sim F(x)$, $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

$$\Rightarrow \quad f(x) = F'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

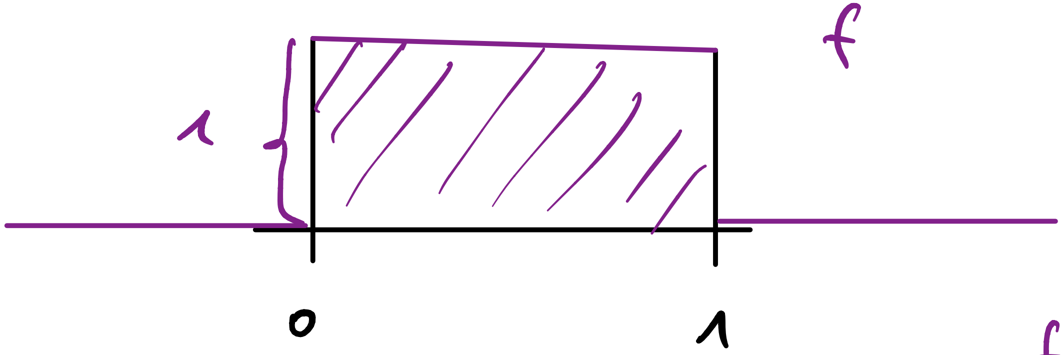
Dichte einer exponentiell verteilten ZV.

$$P[a \le X \le b] = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\overset{\shortparallel}{P[X \le b] - P[X \le a]} = F(b) - F(a)$$

Zusammenhang zwischen einer Fkt f und ihrer Stammfunktion

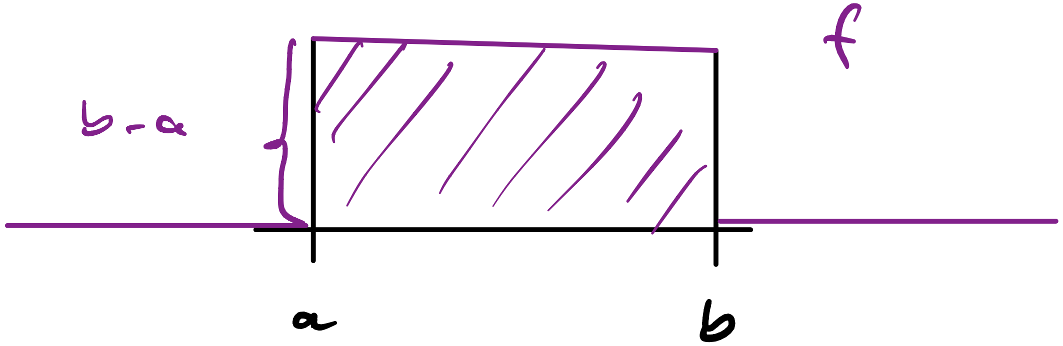
Bus fährt mit stündlichem Abstand



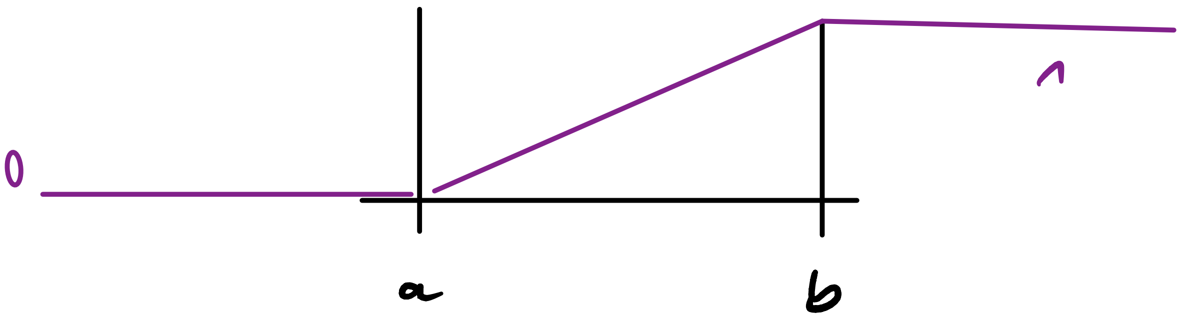
$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1$$

Stetige Gleichverteilung über $[0,1]$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

Welche Konstante?

werner.nutt@gmail.com (not shared) Switch account

Die Funktion f sei definiert als

$$f(x) = c\,(2x - x^2) \quad \text{für} \quad 0 < x < 2 \quad \text{und} \quad 0 \ \text{sonst.}$$

Wie muss c gewählt werden, damit f eine Dichtefunktion ist?

c =

- 4/3
- 1
- 3/4
- 1/2
- 0

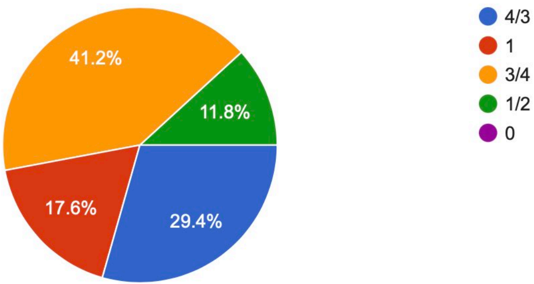
17 responses

Accepting responses

Summary | Question | Individual

c =

17 responses



Quiz: Welche Konstante?

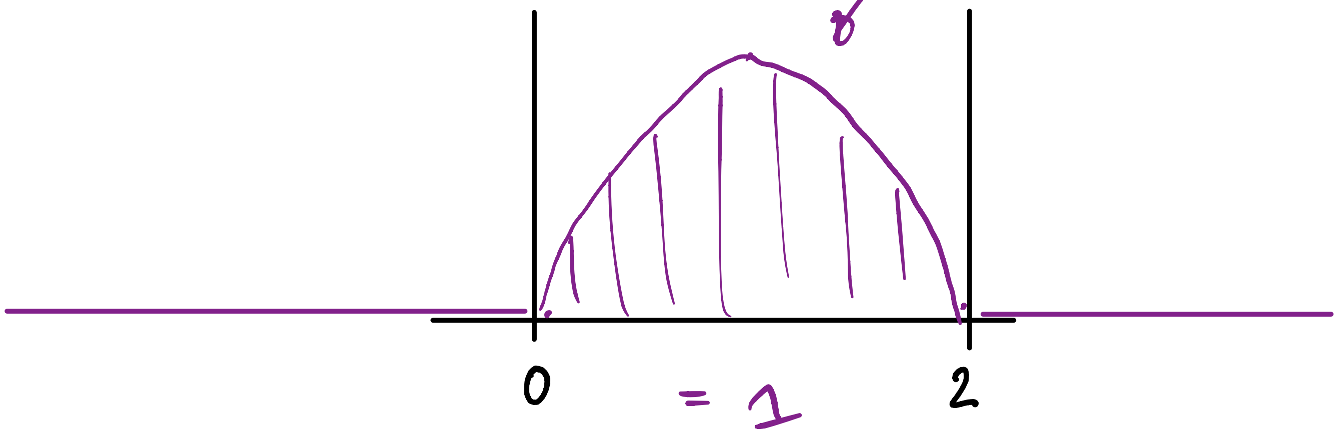
Die Funktion f sei definiert als

$$f(x) = c\,(2x - x^2) \quad \text{für} \quad 0 < x < 2 \quad \text{und} \quad 0 \text{ sonst.}$$

Wie muss c gewählt werden, damit f eine Dichtefunktion ist?

$c(2x - x^2) = c \cdot x \cdot (2 - x)$

Parabel



$1 = \int_0^2 f(x)\,dx = c \int_0^2 2x - x^2$

$$c \int_0^2 2x - x^2 \, dx = c \left[2\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^2$$

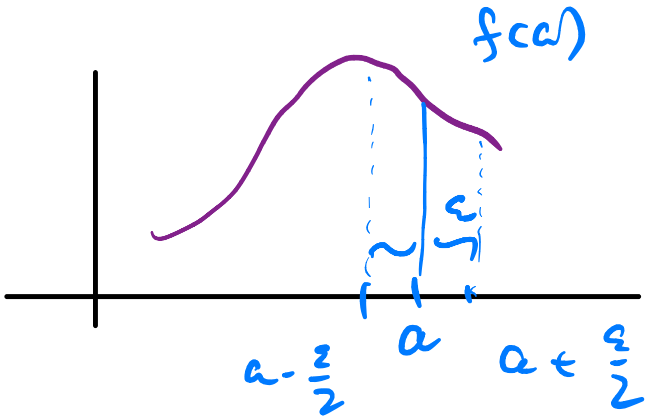
$$= c \left(2\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} - 0 + 0 \right) =$$

$$= c \left(4 - \frac{8}{3} \right) = c \, \frac{12 - 8}{3} = c \frac{4}{3} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad c = \frac{3}{4}$$

Dichte: Intuition

Sei f eine stetige Dichte



$$P\left[a-\frac{\varepsilon}{2} \leq X \leq a+\frac{\varepsilon}{2}\right] \approx \varepsilon \cdot f(a)$$

Die W.keit, dass X in ein Intervall um a fällt ist proportional zu $f(a)$

2.4 Der Erwartungswert (expected value, expectation)

Würfeln: Sei X die gewürfelte Zahl,

Im Durchschnitt sehen wir:

Each number has the same probability: $\frac{1}{6}$

In $\frac{1}{6}$ th of case, we have 1

———— " ———— 2

. . .

———— " ———— 6

n throws:

$$\frac{1}{\cancel{n}}\left(\frac{\cancel{n}}{6}\cdot 1+\frac{\cancel{n}}{6}\cdot 2+\frac{\cancel{n}}{6}\, 3+\frac{\cancel{n}}{6}\cdot 4+\frac{\cancel{n}}{6}\cdot 5+\frac{\cancel{n}}{6}\cdot 6\right)$$

$$P[X=1]\cdot 1+P[X=2]\cdot 2+\dots+P[X=6]\cdot 6$$

n throws:

$$\frac{1}{\cancel{4}}\left(\frac{\cancel{4}}{6}\cdot 1+\frac{\cancel{4}}{6}\cdot 2+\frac{\cancel{4}}{6}3+\frac{\cancel{4}}{6}\cdot 4+\frac{\cancel{4}}{6}\cdot 5+\frac{\cancel{4}}{6}\cdot 6\right)$$

$$P[X=1]\cdot 1+P[X=2]\cdot 2+\cdots+P[X=6]\cdot 6$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 1+\cdots+\frac{1}{6}\cdot 6=\frac{1}{6}(1+2+\cdots 6)=\frac{1}{6}21$$

$$=\frac{21}{6}=3\frac{3}{6}=3.5$$

Weighted avg where weights are the probabilities

Münzwurf, n-mal: # Kopf im Durchschnitt

$n=1$

$$0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Zahl

$\updownarrow$

$$P[X=0] \cdot 0 + P[X=1] \cdot 1$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

n beliebig

$$\frac{n}{2} = n \cdot \frac{1}{2}$$

Definition: Sei X eine diskrete ZV, mit Werten $x_1, \dots, x_n, \dots$

Dann ist

$$E[X] := \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P[X = x_i]$$

wenn X endl. viele Werte $x_1, \dots, x_n$ hat

$$E[X] := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P[X = x_i]$$

der Erwartungswert von X

$f(x) \cdot \Delta \approx P[x \le X \le x + \Delta]$

Sei X stetig mit Dichte f. Dann ist

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \underbrace{f(x)\,dx}_{\text{W.keit für } x}$$

falls das Integral existiert