Bayes'sche Formel

$$\boxed{P(\mathcal{F} \mid \mathcal{E}) = \frac{P(\mathcal{E} \mid \mathcal{F}) \cdot P(\mathcal{F})}{P(\mathcal{E})}}$$

$\mathcal{E}$ Test, Zeuge, viele Großbuchstaben

Beweis:

$$P(\mathcal{E}\mathcal{F}) = P(\mathcal{E} \mid \mathcal{F})\, P(\mathcal{F})$$

$$\shortparallel$$

$$P(\mathcal{F}\mathcal{E}) = P(\mathcal{F} \mid \mathcal{E})\, P(\mathcal{E})$$

$$\Rightarrow \quad P(\mathcal{F} \mid \mathcal{E}) = \frac{P(\mathcal{E} \mid \mathcal{F})\, P(\mathcal{F})}{P(\mathcal{E})}$$

$\mathcal{F}$ Krankheit, Autofarbe, Spam

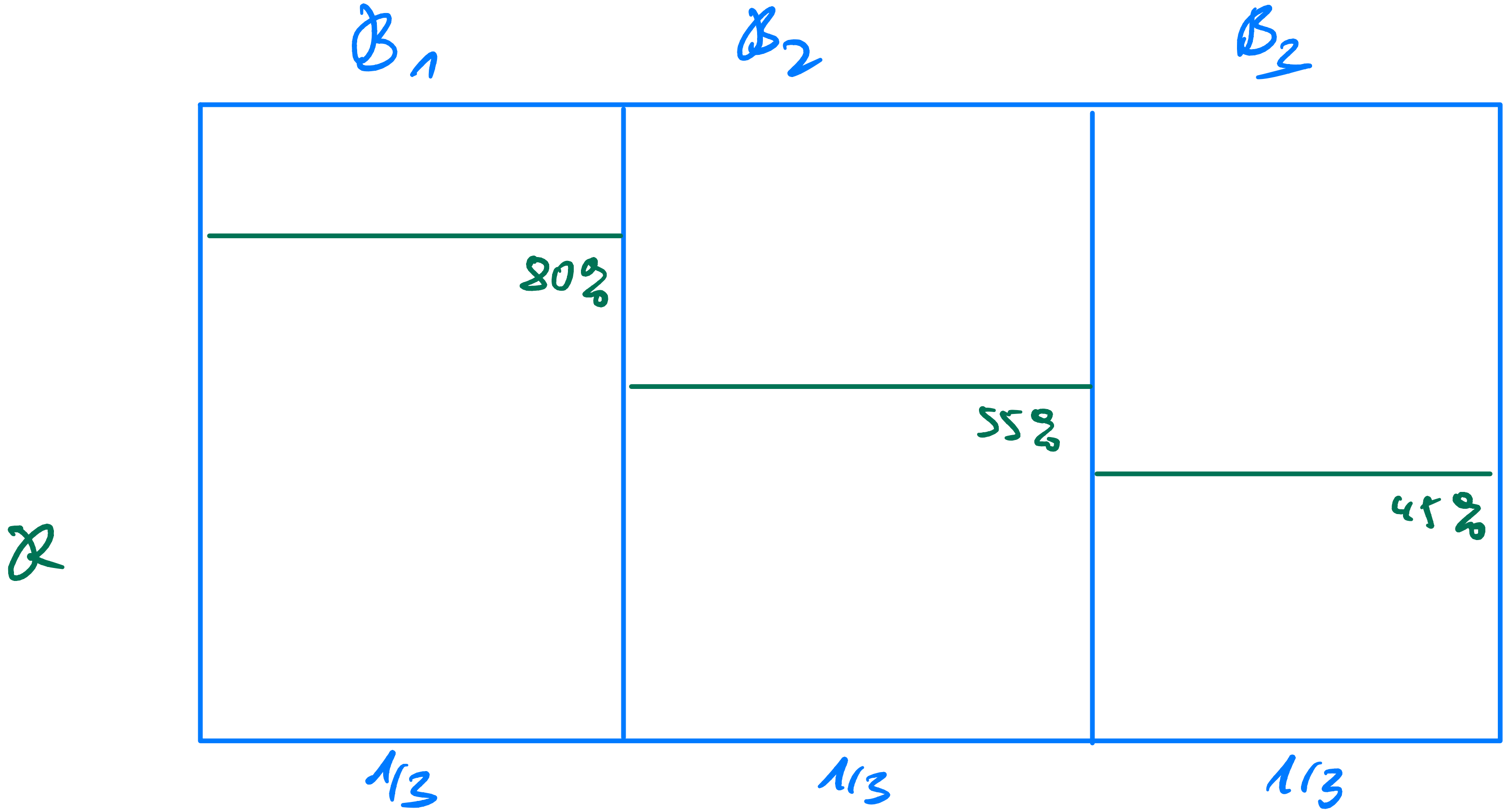
Quiz Murmeln

GTW: Was sind $\mathcal{E}$ und die $\mathcal{F}_i$?

$\mathcal{E}$ = eine rote Murmel wird gezogen

$\mathcal{F}_i$ = der i-te Beutel wird gewählt

$P(\mathcal{E}) =$



$$P(B_i) = \frac{1}{3}$$

$$P(R) = P(R \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(R \mid B_2) \cdot P(B_2) + P(R \mid B_3) \cdot P(B_3)$$

$$= \frac{80}{100} \cdot \frac{1}{3} + \frac{55}{100} \cdot \frac{1}{3} + \frac{45}{100} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{80+55+45}{100}$$

$$= \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{180}}{100} = \frac{60}{100}$$

Quiz 10: Bivid-Diagnose

B Person hat Bivid

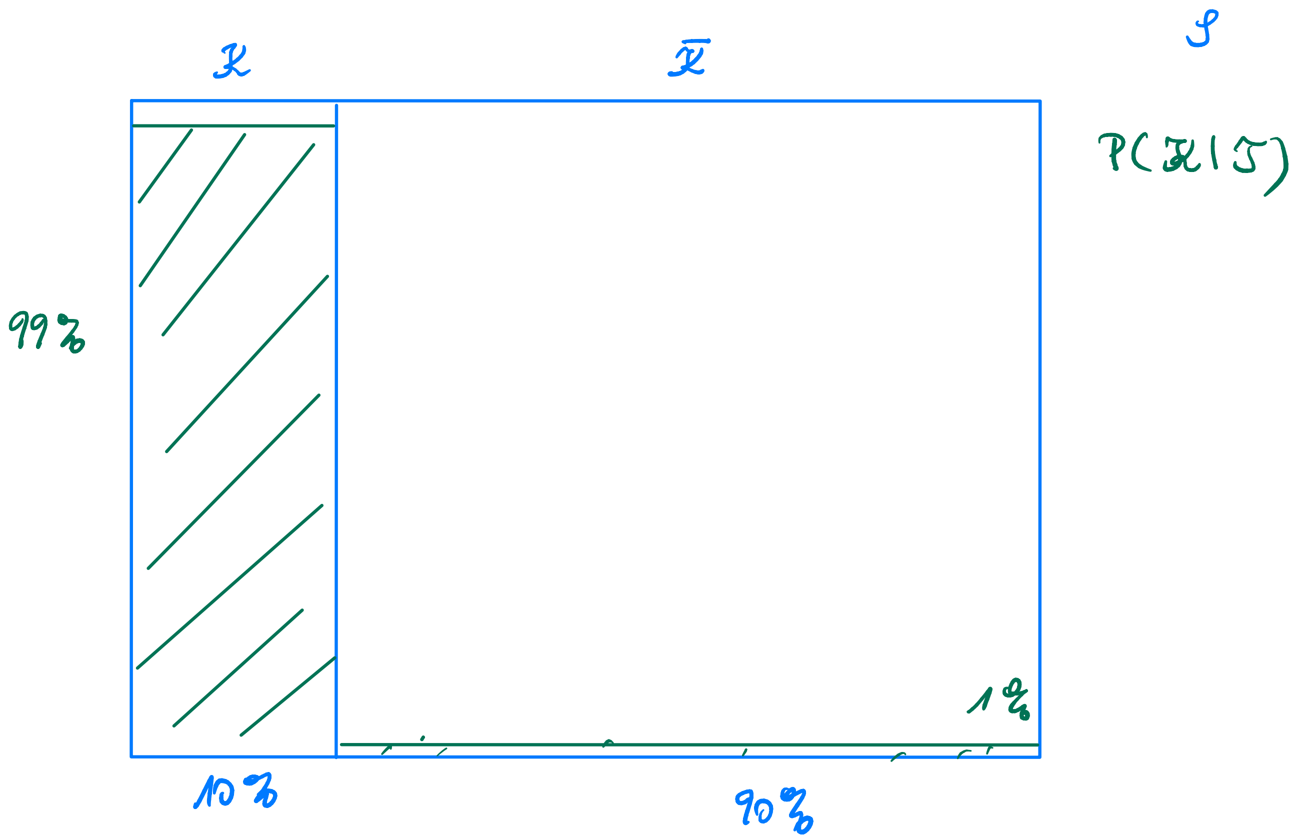
T Test positiv

Frage: $P(B \mid T) = ?$

$$P(T \mid B) = \frac{99}{100}$$

$$P(\bar{T} \mid \bar{B}) = \frac{99}{100} \Rightarrow P(T \mid \bar{B}) = \frac{1}{100}$$

$$P(B) = \frac{10}{100}$$



$$P(T) = P(T|K) \cdot P(K) + P(T|\bar{K}) \cdot P(\bar{K})$$

$$= \frac{99}{100} \cdot \frac{10}{100} + \frac{1}{100} \cdot \frac{90}{100} = \frac{990 + 90}{100 \cdot 100}$$

$$P(K|T) = \frac{P(T|K)\,P(K)}{P(T)} = \frac{\frac{99 \cdot 1\cancel{0}}{\cancel{100 \cdot 100}}}{\frac{99\cancel{0} + 9\cancel{0}}{\cancel{100 \cdot 100}}} = \frac{99}{108} = 92\,\%$$

1.6 Unabhängige Ereignisse

Beispiel: Standard-Kartenspiel mit 52 Karten

$\mathcal{E}$ = ziehe eine rote Karte

$\mathcal{F}$ = ziehe ein Ass

$$P(\mathcal{E}) = \frac{1}{2} \qquad P(\mathcal{F}) = \frac{1}{13}$$

$$P(\mathcal{E} \mid \mathcal{F}) = P(\text{"Ziehe rotes Ass aus 4 Assen"}) = \frac{1}{2}$$

$$\underbrace{P(\mathcal{E} \mid \mathcal{F})}_{\text{A-posteriori W.keit}} = \underbrace{P(\mathcal{E})}_{\text{A-priori-W.keit}} \qquad P(\mathcal{F} \mid \mathcal{E}) = P(\mathcal{F})$$

A-posteriori W.keit = A-priori-W.keit

$\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ unabhängig $\iff$ $P(\mathcal{E} \mid \mathcal{F}) = P(\mathcal{E})$

independent

Quiz: Unabhängige Ereignisse beim Würfeln

$$\mathcal{E} = \text{"} w_1 + w_2 = 7 \text{"}$$
$$\mathcal{F} = \text{"} w_1 + w_2 = 8 \text{"}$$
$$\mathcal{G} = \text{"} w_1 = 3 \text{"}$$

$\mathcal{E} = \{(1,6),(2,5),\dots,(6,1)\}$
$\Longrightarrow \#\mathcal{E} = 6$

$\mathcal{F} = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$
$\Longrightarrow \#\mathcal{F} = 5$

$\mathcal{G} = \{(3,1),\dots,(3,6)\}$
$\Longrightarrow \#\mathcal{G} = 6$

$\mathcal{E}$ unabh. $\mathcal{F}$: abh.

$\mathcal{E}$ unabh. $\mathcal{G}$: unabh.

$\mathcal{F}$ unabh. $\mathcal{G}$: abh.

$$P(\mathcal{G}) = \frac{1}{6} \qquad P(\mathcal{G} \mid \mathcal{F}) = \frac{1}{5}$$