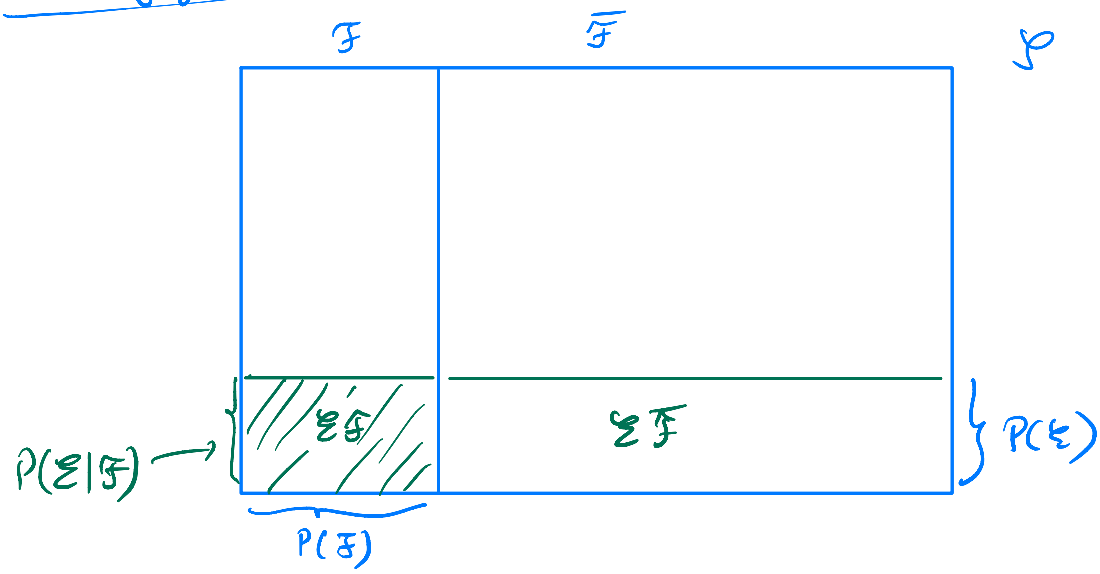
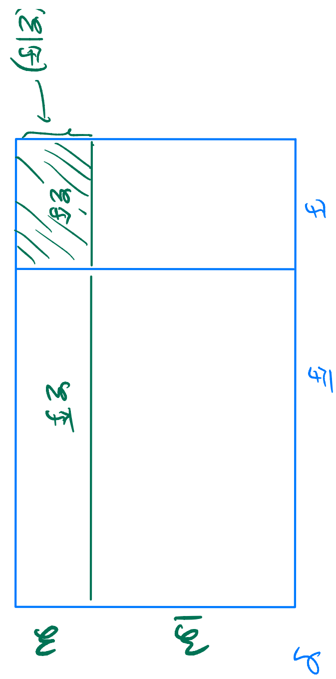
Unabhängigkeit



$P(E) = P(E|F) \quad :\Longleftrightarrow \quad E, F$ unabh.

$\Longleftrightarrow \quad E, \bar{F}$ unabh.

Unabhängigkeit



$P(E) = P(E|F) \quad :\Longleftrightarrow \quad E, F$ unabh.

$\Longleftrightarrow \quad E, \bar{F}$ unabh.

$\Longleftrightarrow \quad \bar{E}, \bar{F}$ unabh. $\Longleftrightarrow \quad F, E$ unabh. $= P(F) = P(F|E)$

Symmetrie

$$P(\mathcal{E} \mid \mathcal{F}) = P(\mathcal{E}) \iff P(\mathcal{E}) = \frac{P(\mathcal{E}\mathcal{F})}{P(\mathcal{F})}$$

$$\iff P(\mathcal{E})P(\mathcal{F}) = P(\mathcal{E}\mathcal{F})$$

Alternative Def" (auch möglich wenn $P(\mathcal{E})=0$ oder $P(\mathcal{F})=0$)

$\mathcal{E}, \mathcal{F}$ unabh. $\iff$ $P(\mathcal{E}\mathcal{F}) = P(\mathcal{E})P(\mathcal{F})$

Seien $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ unabh., $P(\mathcal{E}) \neq 0$

$$P(\mathcal{F}) = \frac{P(\mathcal{E}\mathcal{F})}{P(\mathcal{E})} = \frac{P(\mathcal{F}\mathcal{E})}{P(\mathcal{E})} = P(\mathcal{F} \mid \mathcal{E})$$

$P(\mathcal{E}) = 0 \Rightarrow \mathcal{E}, \mathcal{F}$ unabh. f.a. $\mathcal{F}$

$\mathcal{E}$ unabh. von $\mathcal{F}$, $\mathcal{E}$ unabh. von $\mathcal{G}$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\mathcal{E}$ unabh. $\mathcal{F}\mathcal{G}$

Bsp.: 2 Würfel

$\mathcal{E} =$ "$w_1 + w_2 = 7$" $\quad$ $\mathcal{F} =$ "$w_1 = 1$" $\quad$ $\mathcal{G} =$ "$w_2 = 6$"

$P(\mathcal{E}) = \frac{1}{6}$ $\quad$ $P(\mathcal{F}) = \frac{1}{6}$ $\quad$ $P(\mathcal{G}) = \frac{1}{6}$

$P(\mathcal{E}\mathcal{F}) = \frac{1}{36}$ $\quad$ $P(\mathcal{E}\mathcal{G}) = \frac{1}{36}$ $\quad$ $P(\mathcal{F}\mathcal{G}) = \frac{1}{36}$

$\Rightarrow \mathcal{E}, \mathcal{F}$ und $\mathcal{E}, \mathcal{G}$ und $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sind unabh.

Was ist mit Unabh. von $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}\mathcal{G}$?

$$\underbrace{P(\mathcal{E} \cap (\mathcal{F} \cap \mathcal{G}))}_{= \frac{1}{36}} \neq \underbrace{P(\mathcal{E}) \cdot P(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})}_{= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{36}}$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}\mathcal{G}$ sind nicht unabh.

Wir interessieren uns für Fälle, in denen

$$P(\mathcal{E}\,\mathcal{F}\,\mathcal{G}) = P(\mathcal{E})\cdot P(\mathcal{F})\cdot P(\mathcal{G})$$

Allgemeine Unabh.!

Definition 22: $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ sind unabh. wenn

- $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ und $\mathcal{E}, \mathcal{G}$ und $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ paarweise unabh.
- $P(\mathcal{E}\,\mathcal{F}\,\mathcal{G}) = P(\mathcal{E})\cdot P(\mathcal{F})\cdot P(\mathcal{G})$

Konsequenz: $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ unabh. $\Rightarrow$ $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}\mathcal{G}$ unabh.

Beweis: $P(\mathcal{E}\cdot(\mathcal{F}\mathcal{G})) = P(\mathcal{E}\cdot\mathcal{F}\cdot\mathcal{G}) = P(\mathcal{E})\cdot P(\mathcal{F})\cdot P(\mathcal{G})$

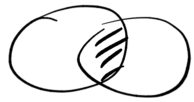
$$= P(\mathcal{E})\cdot P(\mathcal{F}\mathcal{G})$$

$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ unab.

Bemerkung: $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ unab. $\Rightarrow$ $\mathcal{E}$ und $(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$ unab.

$$P(\mathcal{E}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})) = P(\mathcal{E}\mathcal{F} \cup \mathcal{E}\mathcal{G})$$

$$= P(\mathcal{E}\mathcal{F}) + P(\mathcal{E}\mathcal{G}) - P(\mathcal{E}\mathcal{F}\cancel{\mathcal{E}}\mathcal{G})$$



$$= P(\mathcal{E})P(\mathcal{F}) + P(\mathcal{E})P(\mathcal{G}) - P(\mathcal{E}) \cdot \underbrace{P(\mathcal{F}) \cdot P(\mathcal{G})}_{P(\mathcal{F}\mathcal{G})}$$

$$= P(\mathcal{E})\left(P(\mathcal{F}) + P(\mathcal{G}) - P(\mathcal{F}\mathcal{G})\right)$$

$$= P(\mathcal{E}) \cdot P(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$$

$$= P(\mathcal{E}) \cdot P(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$$

Allgemeine Definition

$\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ unabhängig $:\Leftrightarrow$

für jede Teilmenge $\{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m\} \subseteq \{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n\}$ gilt:

$$P(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \cap \dots \cap \mathcal{F}_m) = P(\mathcal{F}_1) \cdots P(\mathcal{F}_m)$$

<u>Beispiele:</u> n Würfel: $\mathcal{E}_i$ ist ein Ereignis, das den i-ten Würfel betrifft

$\mathcal{E}_i$: Experimente, etwa Meinungsumfrage:

wähle Interviewpartner,
die nichts miteinander zu tun haben.

$\mathcal{E} = \text{"}\omega_1 + \omega_2 = 7\text{"}$ $\quad$ $\cancel{\mathcal{F}_0 = \text{"}\omega_1 + \omega_2 = 8\text{"}}$

$$P(\mathcal{E}) = \frac{\#\mathcal{E}}{\#\mathcal{S}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$\mathcal{F} = \text{"}\omega_1 = 1\text{"}$

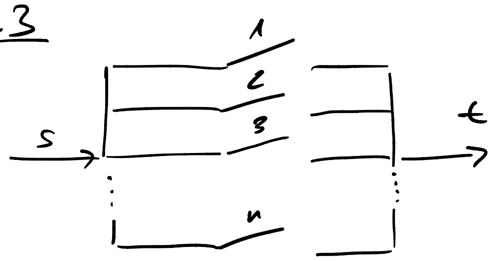
$\mathcal{G} = \text{"}\omega_2 = 6\text{"}$

$$\cancel{P(\mathcal{F}_0) = \frac{\#\mathcal{F}_0}{\#\mathcal{S}} = \frac{5}{36} = \frac{5}{36}}$$

$$P(\mathcal{F}) = \frac{\#\mathcal{F}}{\#\mathcal{S}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(\mathcal{G}) = \frac{\#\mathcal{G}}{\#\mathcal{S}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

<u>Beispiel 23</u>



- Komponenten sind unabhängig
- funktionieren mit W.keit p_i

System funktioniert, wenn ≥ 1 Komponenten funktionieren

$\mathcal{E}$ = "System funktioniert" $\qquad$ $\mathcal{F}_i$ = "Komponente i funktioniert"

$\Rightarrow P(\mathcal{E}) = ?$

$\bar{\mathcal{E}}$ = "System funkt. nicht" $\Leftrightarrow$ keine Komp. funktioniert

$\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathcal{F}}_1 \cdots \bar{\mathcal{F}}_n$; $\quad \mathcal{F}_i$ unabh. $\Rightarrow \bar{\mathcal{F}}_i$ unabh.

$$P(\bar{\mathcal{E}}) = P(\bar{\mathcal{F}}_1 \cdots \bar{\mathcal{F}}_n) = P(\bar{\mathcal{F}}_1) \cdots P(\bar{\mathcal{F}}_n) = (1 - P(\mathcal{F}_1)) \cdots (1 - P(\mathcal{F}_n))$$

$$\Rightarrow P(\mathcal{E}) = 1 - P(\bar{\mathcal{E}}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P(\mathcal{F}_i))$$