3 Verteilungen und Dichten von Zufallsvariablen

3.1 Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen

Sei $\mathcal{X}$ eine Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{5} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3. \end{cases}$$

Berechnen Sie:

1. $P[\mathcal{X} \leq 1/2]$
2. $P[\mathcal{X} > 1/2]$
3. $P[\mathcal{X} < 3]$
4. $P[\mathcal{X} = 3]$
5. $P[\mathcal{X} < 1]$
6. $P[\mathcal{X} = 1]$.

3.2 Computer-Ausfall

Die Zeit in Stunden, die ein Computer funktioniert, bevor er ausfällt, sei eine stetige Zufallsvariable mit einer Wahrscheinlichkeitsdichte, die gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-x/100} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Computer zwischen 50 und 150 Stunden funktioniert, bevor er versagt?

   Hinweis: Beachten Sie, dass Sie zunächst λ so bestimmen müssen, dass f eine Dichte ist.

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Computer weniger als 100 Stunden funktioniert?

3.3 Lebensdauer von Hardware

Die Lebensdauer eines Hardwareteils (in Monaten) sei eine Zufallsvariable mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 60 \\ \frac{60}{x^2} & x > 60. \end{cases}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 2 von 5 solcher Teile innerhalb von 90 Monaten ersetzt werden müssen? Wir nehmen an, dass der Ausfall eines Teils unabhängig vom möglichen Ausfall aller anderen ist.