Beobachtung:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Warum?

Beweis: Wir erzählen eine Geschichte (proof by story)

- n Leute
- bilde ein Team aus k Personen : $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten

  Fred $\in$ Leute; 2 Fälle: $=$

  - Fred $\in$ Team
    wähle weitere $k-1$ Personen aus $n-1$: $\binom{n-1}{k-1}$ Möglichkeiten

    $+$

  - Fred $\notin$ Team
    wähle alle k Personen aus $n-1$: $\binom{n-1}{k}$ Möglichkeiten

Gleichverteilte Wahrscheinlichkeiten: Zusammenfassung

$\# \mathcal{S} < \infty$, $\quad \mathcal{E} \subseteq \mathcal{S} \Rightarrow P(\mathcal{E}) = \dfrac{\# \mathcal{E}}{\# \mathcal{S}}$

$\Rightarrow$ Problem: Wie viele Elemente/Ergebnisse haben $\mathcal{E}$ und $\mathcal{S}$?

Häufig: Gegeben n_i Objekte, $i = 1, \ldots, k$; wähle k-mal hintereinander je 1 Objekt aus n_i aus

Speziell: Mengen von n Objekten

2 Unterscheidungen

- zurücklegen oder nicht zurücklegen
- Reihenfolge wichtig oder nicht

2 Unterscheidungen

- zurücklegen oder nicht zurücklegen
- Reihenfolge wichtig oder nicht

Reihenfolge	zurück legen	nicht zurück legen
wichtig	$\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots n}_{k\text{-mal}} = n^k$	$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$
nicht wichtig	$\binom{n+k-1}{k}$ * Auswahl von Multimengen: $\{\{1,1,3,5\}\}$, $\{\{1,4,4,4\}\}$	wähle eine Menge von k Objekten aus n Objekten aus $\frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$ Auswahl von Mengen: $\{1,3,7,8\} \subseteq \{1,\ldots,10\}$

* schwierig herzuleiten

1.4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

conditional probabilities

Bedingung = condition

2 Würfel

$$P(\underbrace{W_1 + W_2 = 8}_{\mathcal{E}}) = \frac{\#\mathcal{E}}{\#\Omega} = \frac{\#\{(2,6),(3,5),\ldots,(6,2)\}}{6 \cdot 6} = \frac{5}{36}$$

Angenommen, wir wissen $W_1 = 3$:

$$P(W_1 + W_2 = 8 \mid \underbrace{W_1 = 3}_{\text{Bedingung/condition}}) = ?$$

Neuer Stichprobenraum $\Omega' = \{(3,1),\ldots,(3,6)\} \Rightarrow \#\Omega' = 6$

$\mathcal{E}' = \{(3,5)\} \Rightarrow \#\mathcal{E}' = 1$

$$P(W_1 + W_2 = 8 \mid W_1 = 3) = \frac{\#\mathcal{E}'}{\#\Omega'} = \frac{1}{6} \neq \frac{5}{36}$$

$P(\mathcal{E} \mid \mathcal{F})$

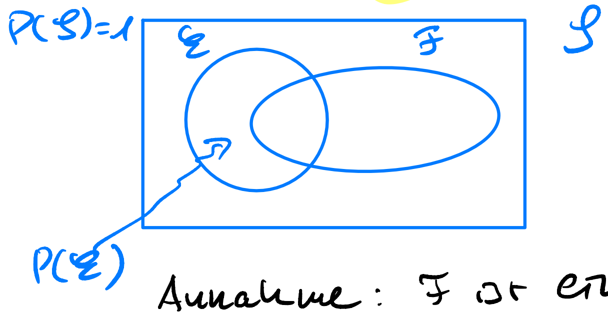
„W.keit von $\mathcal{E}$ unter der Bedingung $\mathcal{F}$"

- - - - gegeben $\mathcal{F}$"   given $\mathcal{F}$

wenn $\mathcal{F}$"   if $\mathcal{F}$

<u>Definition</u> 11: $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ Ereignisse, $P(\mathcal{F}) > 0$

$$P(\mathcal{E} \mid \mathcal{F}) := \frac{P(\mathcal{E} \cap \mathcal{F})}{P(\mathcal{F})}$$



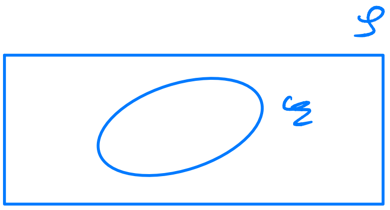
Annahme: $\mathcal{F}$ ist eingetreten

$\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cap \mathcal{F}$

Normalisieren P zu $P' = P(\cdot \mid \mathcal{F})$, s. dass $P'(\mathcal{S}') = 1$

$$P'(\mathcal{E}) = P(\mathcal{E} \mid \mathcal{F}) = \frac{P(\mathcal{E}')}{P(\mathcal{F})} = \frac{P(\mathcal{E} \cap \mathcal{F})}{P(\mathcal{F})}$$

Intuition: Wahrscheinlichkeiten sind Proportionen



$P(E)$ = die Proportion von Ergebnismengen

W.theorie: Messen der relativen Größe von Ergebnismengen

Wahrscheinlichkeit von E:

= relative Größe von E im Vergleich zu S

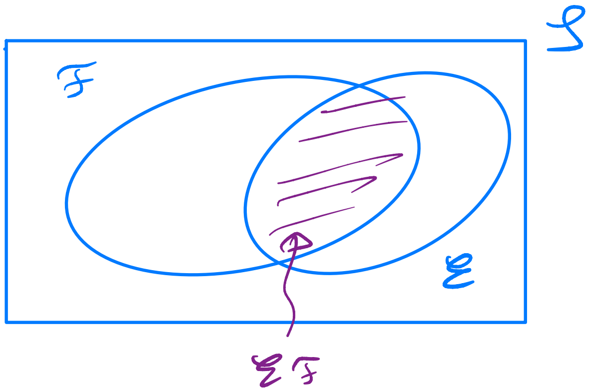
= Anteil von E an S

$$= \frac{\text{Größe } E}{\text{Größe } S}$$

→ 3 blue one brown, Kanal auf Youtube, Satz von Bayes

Bedingte W.keiten: Anpassung der Proportionen

Conditional Probabilities: Adjustment of Proportions



$P(E)$ = Proportion von E zu S

Annahme: F ist eingetreten

$P'(E)$ = Proportion von $E \cap F$ zu F

oder

$P'(E) = P(E|F)$ ist der Anteil von $E \cap F$ an F

$$P'(E) = P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

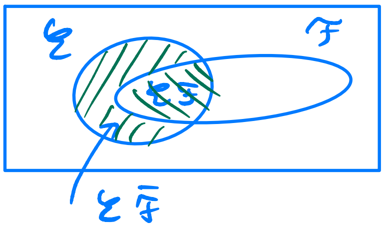
Bei Gleichverteilung:

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{\#EF}{\#S}}{\frac{\#F}{\#S}} = \frac{\#EF}{\#F}$$

1.5 Der Satz von Bayes (Bayes' Theorem)

$\mathcal{E}, \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{E} = \mathcal{E}\mathcal{F} \,\dot{\cup}\, \mathcal{E}\bar{\mathcal{F}}$

disjunkte Vereinigung



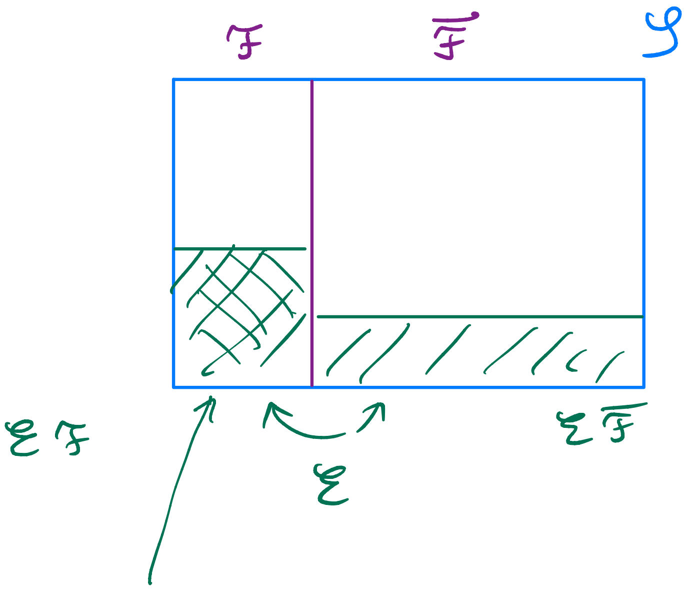
Gesetz der totalen W.keit

law of total probability

LOTP

$$\Rightarrow \boxed{P(\mathcal{E}) = P(\mathcal{E}\mathcal{F}) + P(\mathcal{E}\bar{\mathcal{F}}) = P(\mathcal{E}|\mathcal{F})\,P(\mathcal{F}) + P(\mathcal{E}|\bar{\mathcal{F}})\,P(\bar{\mathcal{F}})}$$

Also: Berechne $P(\mathcal{E})$ durch Fallunterscheidung (case analysis) nach $\mathcal{F}$



$P(\mathcal{E})$ A-priori W.keit

prior (prob.) von $\mathcal{E}$

$P(\mathcal{E}|\mathcal{F})$ A-posteriori W.keit

posterior (p.) von $\mathcal{E}$

$$P(\mathcal{E}) = P(\mathcal{E}\mathcal{F}) + P(\mathcal{E}\bar{\mathcal{F}})$$
$$= P(\mathcal{E}|\mathcal{F}) \cdot P(\mathcal{F})$$
$$+ P(\mathcal{E}|\bar{\mathcal{F}}) \cdot P(\bar{\mathcal{F}})$$

Bayes:

$$P(\mathcal{F}|\mathcal{E}) = \,?$$

Beispiel 15 Versicherungsgesellschaft (insurance company)

2 Arten von Kunden

Vorsichtige (prudent)	70 %	$\mathcal{V}$
Risikofreudige (risk takers)	30 %	$\mathcal{R} = \overline{\mathcal{V}}$

Pro Jahr haben $\left\{\begin{array}{l} 20\,\% \text{ der Vorsichtigen} \\ 40\,\% \text{ der Risikofreudigen} \end{array}\right\}$ einen Unfall (accident)

Ereignis $\mathcal{U}$

$$P(\mathcal{U}) = P(\mathcal{U}\mathcal{V}) + P(\mathcal{U}\mathcal{R})$$
$$= P(\mathcal{U}|\mathcal{V})\,P(\mathcal{V}) + P(\mathcal{U}|\mathcal{R})\,P(\mathcal{R})$$
$$= 0{,}2 \times 0{,}7 + 0{,}4 * 0{,}3$$
$$= 0{,}14 + 0{,}12 = 0{,}26$$

Aktualisierung von Einschätzungen

Updating Beliefs

Beispiel 16: Ein Kunde hatte einen Unfall.

Was ist die W.keit, dass er risikofreudig war?

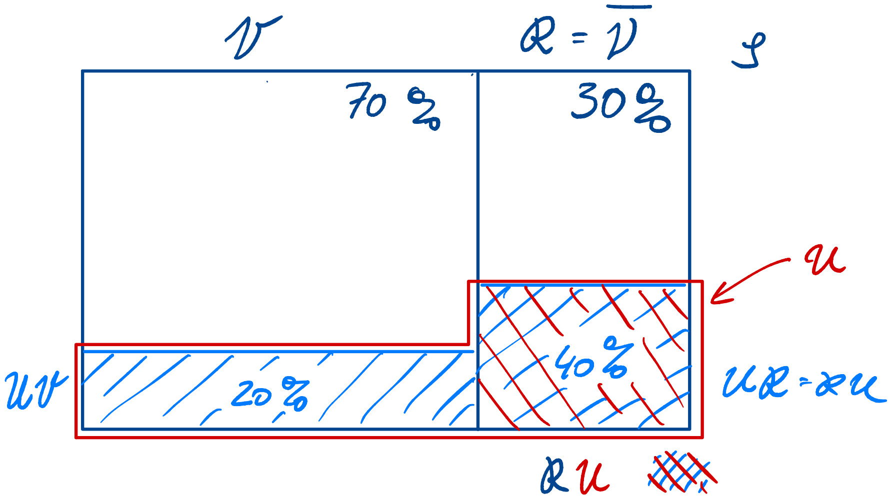
Gegeben:

$P(V)$ $(= P(R))$

$P(U|V)$

$P(U|R) = P(U|\bar{V})$

$\Rightarrow P(R|U) = \ ?$



$$P(R|U) = \frac{P(RU)}{P(U)} = \frac{P(UR)}{P(UR) + P(UV)} = \frac{P(U|R)\cdot P(R)}{P(U|R)\cdot P(R) + P(U|V)\cdot P(V)}$$

$$= \frac{0{,}4 \cdot 0{,}3}{0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}7} = \frac{0{,}12}{0{,}12 + 0{,}14}$$

$$= \frac{12}{12 + 14} = \frac{12}{26} = \frac{6}{13}$$

Anwendung: **Medizinische Tests**

K Patient hat die Krankheit

T Test auf Krankheit: Patient ist positiv

Studie:

$P(T|K)$ Test mit Patienten, die K haben

$P(T|\bar{K})$ Test mit gesunden Testpersonen

$P(K)$ Häufigkeit von K

Frage: $P(K|T)$ Krankheit falls Test positiv?

Quiz 9: Test auf Krankheit

K Person hat Krankheit

T Test ist positiv

$$P(T \mid K) = \frac{99}{100} \qquad P(T \mid \bar{K}) = \frac{1}{100} \qquad P(K) = \frac{1}{100}$$

$$P(K \mid T) =$$

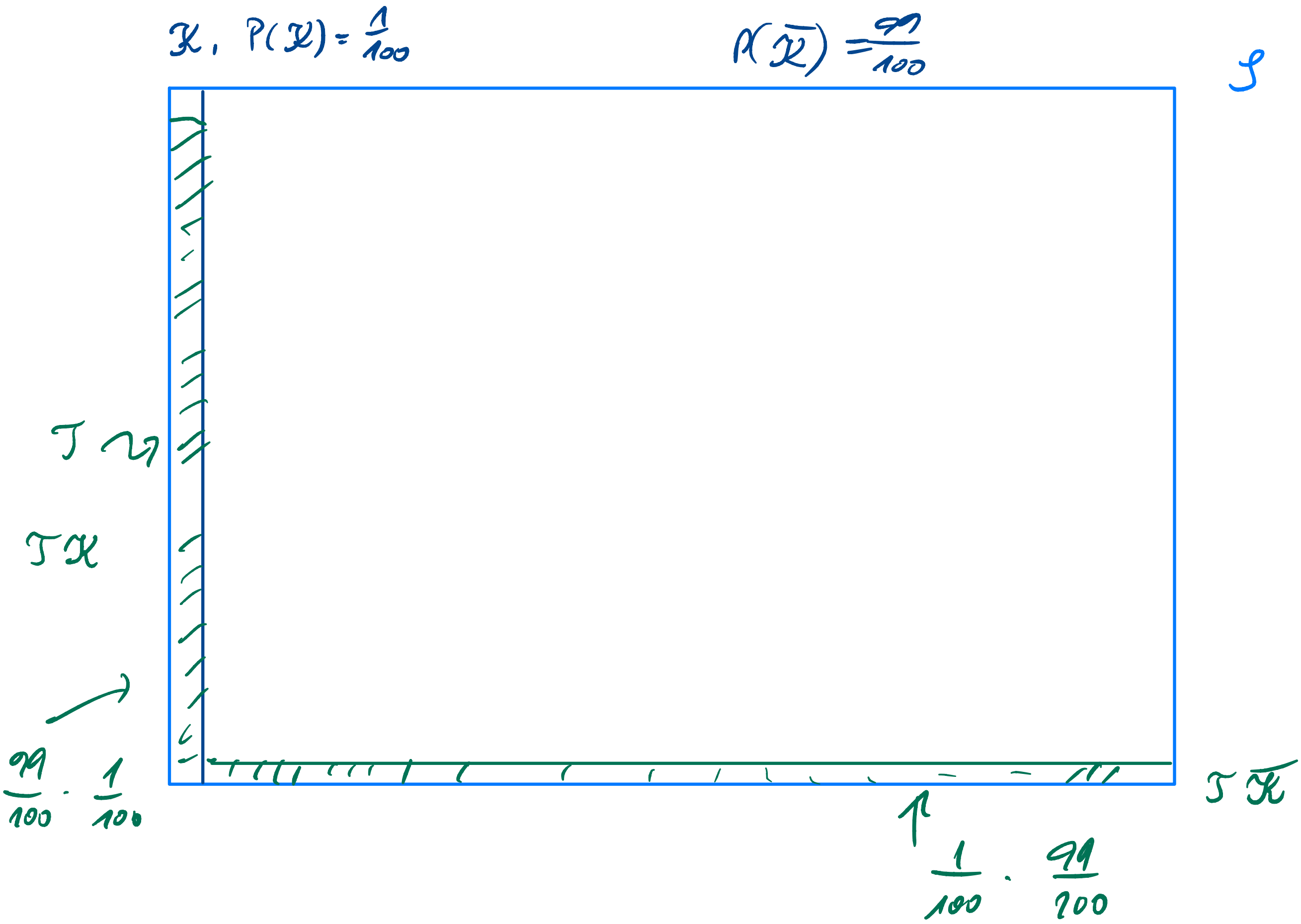
Avid-20 ist eine neue Krankheit. Für die Diagnose wurde ein neuer Test mit den folgenden Merkmalen entwickelt:

- Hat eine Person **Avid-20**, ist der Test positiv mit einer Wahrscheinlichkeit von **99 %**.
- Hat eine Person **nicht Avid-20**, ist der Test positiv mit einer Wahrscheinlichkeit von **1 %**.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass eine **Person** Avid-20 hat, beträgt **1 %**.

Wenn der Test positiv ist, wie hoch ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Person mit Avid-20 infiziert ist?

- ○ 99%
- ○ 50%
- ○ 20%
- ○ 1%


Test auf eine Krankheit
28 responses
Publish analytics
Wenn der Test positiv ist, wie hoch ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Person mit Avid-20 infiziert ist?
28 responses
14.3%
14.3%
67.9%
99%
50%
20%
1%


K, P(K) = 1/100
P(K̄) = 99/100
S
T ∩
TK
99/100 · 1/100
1/100 · 99/100
T K̄