Beispiel 7 Kurs mit 5 männlichen, 3 weiblichen Studenten

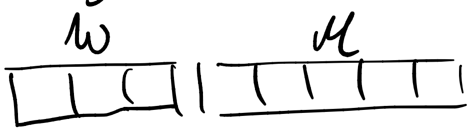
Prüfung: alle Studenten erhalten unterschiedlichen Noten

$$P(\underbrace{\text{"Studentinnen erhalten die besten Noten"}}_{\mathcal{E}}) = ?$$

$\mathcal{S}$ = alle möglichen Rangordnungen $\Rightarrow \#\mathcal{S} = 8!$

$\mathcal{E}$ = Rangordnungen mit Studentinnen an der Spitze

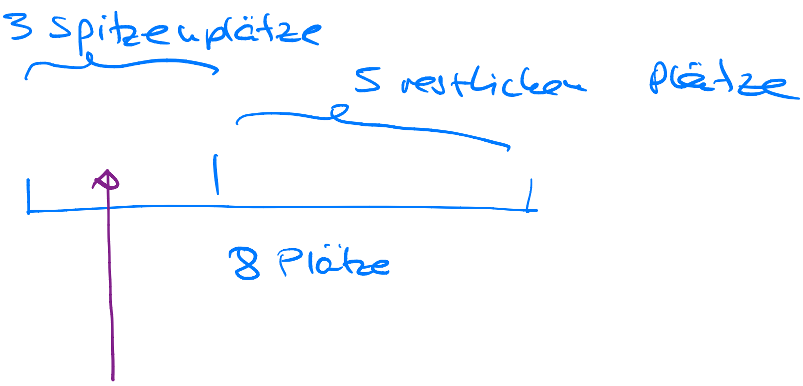
$\mathcal{E}$



$$\#\mathcal{E} = 3! \times 5!$$

$$P(\mathcal{E}) = \frac{\#\mathcal{E}}{\#\mathcal{S}} = \frac{3! \times 5!}{8!} = \frac{3! \times \cancel{5!}}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}} = \frac{1}{8 \cdot 7}$$

$$= \frac{1}{56}$$



= Auswahl von 3 Studenten

"3 weibl. Studenten an Spitze" ist ein spezielles Ergebnis, nämlich Auswahl einer spez. Menge von 3 Stud.

? Wie viele Mögl. gibt es, 3 Studenten aus 8 auszuwählen.

Beispiel 7, 2. Ansatz (approach)

Wir wählen eine Gruppen von 3 Studenten aus 8 aus.
Was ist die Wahrsch.keit, dass eine feste bestimmte Gruppe gewählt wird?

$\mathcal{S}$ = alle 3er Gruppen aus der Menge von 8 Studenten

$\mathcal{E}$ = die Gruppe der 3 weibl. Studenten $\Rightarrow \#\mathcal{E} = 1$

$$P(\mathcal{E}) = \frac{\#\mathcal{E}}{\#\mathcal{S}} = \frac{1}{\#\mathcal{S}}$$! Was ist $\#\mathcal{S}$?

Wie viele 3er-Gruppen können aus 8 Studenten gewählt werden?

1.) Geordnete Auswahlen: $8 \cdot 7 \cdot 6$

2.) Reihenfolge nicht wichtig
$\Rightarrow$ Wie oft kommt dieselbe Gruppe vor?

Die drei Studentinnen seien Mary, Jane und Paula:
Die drei Studentinnen können auf $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ Arten ausgewählt werden:

M, J, P	J, P, M	P, M, J
M, P, J	J, M, P	P, J, M

Die Anzahl der möglichen 3er-Gruppen, die aus 8 Objekten ausgewählt werden können, ist also

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

← geordnete Auswahlen

← Anordnungen, die zur selben Gruppe führen

Schreibweise ("Notation")

$$\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = \binom{8}{3}$$

"8 über 3"

"8 choose 3"

$$\binom{8}{3} = \frac{(8\cdot 7\cdot 6)\cdot(5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}{(3\cdot 2\cdot 1)\cdot(5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)} = \frac{8!}{3!\ 5!} = \frac{8!}{5!\ 3!}$$

$$= \frac{(8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4)\cdot(3\cdot 2\cdot 1)}{(5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)\cdot(3\cdot 2\cdot 1)} = \binom{8}{5}$$

Allgemein:

"n über k" "n choose k"

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ \cdots\ (n-k-1)}{k!} = \frac{n!}{k!\ (n-k)!}$$

Anwendung:

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{n \text{ Faktoren}}$$

$$= \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \ldots \binom{n}{n} x^0 y^n$$

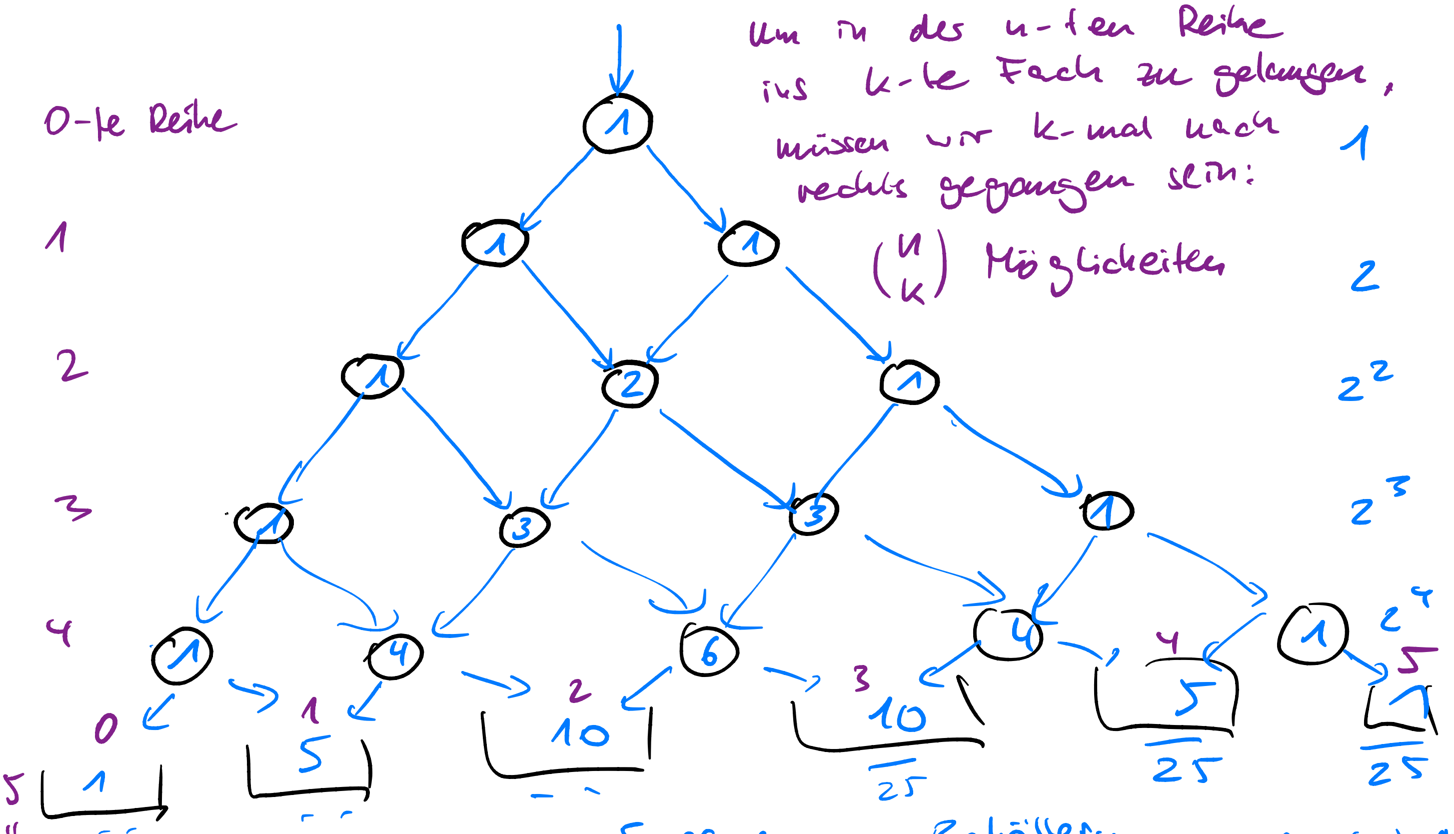
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Binomialkoeffizienten

binomial coefficients

Galtonbrett: Wieviele Pfade führen zu jedem Nagel?

Um in der n-ten Reihe ins k-te Fach zu gelangen, müssen wir k-mal nach rechts gegangen sein: $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten



Gesamtzahl Pfade: 2^5 Pfade zu Behältern

Wahrscheinlichkeit, ins k-te Fach zu gelangen ist $\binom{n}{k}/2^n = \binom{n}{k}2^{-n}$

Beispiel 9: Gegeben eine Gruppe von 5 Männern, 8 Frauen.

Wähle zufällig (randomly) 5 Personen

$$P(\underbrace{\text{"2 Männer, 3 Frauen werden ausgewählt"}}_{\mathcal{E}}) = ?$$

$\mathcal{S}$ = Auswahlen (choices) von 5 aus 13 Personen.

Formal: Personen $\{1, \dots, 13\}$, $M = \{1, \dots, 5\}$, $F = \{6, \dots, 13\}$.

$$\mathcal{S} = \{ X \subseteq \{1, \dots, 13\} \mid \# X = 5 \}$$

$$\mathcal{E} = \{ M' \cup F' \mid M' \subseteq M,\ F' \subseteq F,\ \# M' = 2,\ \# F' = 3 \}$$

$$\# \mathcal{S} = \binom{13}{5} \qquad \# \mathcal{E} = \binom{5}{2} \cdot \binom{8}{3}$$

$$P(\mathcal{E}) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{8}{3}}{\binom{13}{5}} = \dots = \frac{560}{1287}$$

1.4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

conditional probabilities

Bedingung = condition

2 Würfel

$$P(\underbrace{W_1 + W_2 = 8}_{\mathcal{E}}) = \frac{\#\mathcal{E}}{\#\Omega} = \frac{\#\{(2,6),(3,5),\ldots,(6,2)\}}{6\cdot 6} = \boxed{\frac{5}{36}}$$

Angenommen, wir wissen $W_1 = 3$:

$$P(W_1 + W_2 = 8 \mid \underbrace{W_1 = 3}_{\text{Bedingung/condition}}) = ?$$

Neuer Stichprobenraum $\Omega' = \{(3,1),\ldots,(3,6)\} \Rightarrow \#\Omega' = 6$

$\mathcal{E}' = \{(3,5)\} \Rightarrow \#\mathcal{E}' = 1$

$$P(W_1 + W_2 = 8 \mid W_1 = 3) = \frac{\#\mathcal{E}'}{\#\Omega'} = \boxed{\frac{1}{6}} \neq \frac{5}{36}$$

$$P(\mathcal{E} \mid \mathcal{F})$$

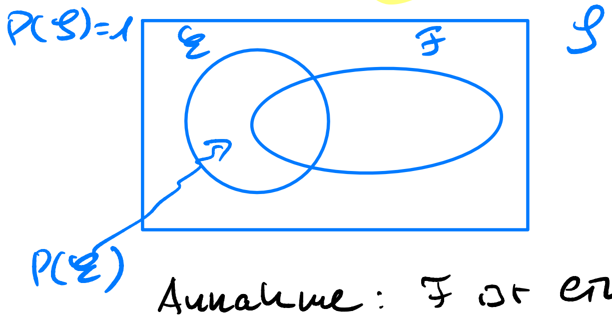
„W.keit von $\mathcal{E}$ unter der Bedingung $\mathcal{F}$"

. . . . . gegeben $\mathcal{F}$" given $\mathcal{F}$

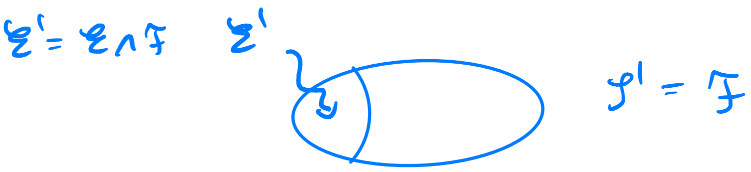
wenn $\mathcal{F}$" if $\mathcal{F}$

Definition 11: $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ Ereignisse, $P(\mathcal{F}) > 0$

$$P(\mathcal{E} \mid \mathcal{F}) := \frac{P(\mathcal{E} \cap \mathcal{F})}{P(\mathcal{F})}$$



Annahme: $\mathcal{F}$ ist eingetreten



Normalisieren P zu $P' = P(\cdot \mid \mathcal{F})$, s. dass $P'(\mathcal{S}') = 1$

$$P'(\mathcal{E}) = P(\mathcal{E} \mid \mathcal{F}) = \frac{P(\mathcal{E}')}{P(\mathcal{F})} = \frac{P(\mathcal{E} \cap \mathcal{F})}{P(\mathcal{F})}$$

Beispiel 12: Kiste mit 32 Transistoren (partly deficient)

20 intakt (working) 4 defekt 8 teilweise defekt

Experiment:

- Nimm 1 Transistor
- Angenommen er funktioniert (d.h. nicht defekt), Was ist die W.keit, dass er intakt ist?

Ereignisse: $\mathcal{I}, \mathcal{D}, \mathcal{T}$ (intakt, defekt, teilw. ...)

$$P(\mathcal{I} \mid \bar{\mathcal{D}}) = \frac{P(\mathcal{I} \cap \bar{\mathcal{D}})}{P(\bar{\mathcal{D}})} = \frac{P(\mathcal{I})}{P(\mathcal{I} \cup \mathcal{T})}$$

$$= \frac{\frac{20}{32}}{\frac{28}{32}} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7}$$

Doppelter Münzwurf

werner.nutt@gmail.com (not shared) Switch account

Jemand hat zweimal eine Münze geworfen hat. Wir wissen, dass es mindestens einmal Kopf war. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es genau zweimal Kopf war? Formal ausgedrückt: Was ist P(2 Kopf | >= 1 Kopf)?

- ◯ 1/4
- ◯ 1/3
- ◯ 1/2

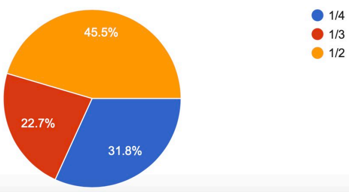
22 responses

Accepting responses

Summary | Question | Individual

Jemand hat zweimal eine Münze geworfen hat. Wir wissen, dass es mindestens einmal Kopf war. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es genau zweimal Kopf war? Formal ausgedrückt: Was ist P(2 Kopf | >= 1 Kopf)?

22 responses



Quiz Münzwurf

$$P(\underbrace{2 \text{ Kopf}}_{\mathcal{E}} \mid \underbrace{\geq 1 \text{ Kopf}}_{\mathcal{F}})$$

$$\Omega = \{ \boxed{\begin{array}{l} \boxed{(K,K)}\ \mathcal{E} \\ (K,Z) \\ (Z,K) \end{array}}\ \mathcal{F} \quad (Z,Z) \}$$

$$P(\mathcal{E}) = \frac{\#\mathcal{E}}{\#\Omega} = \frac{1}{4}$$

$$\#\mathcal{F} = 3$$

$$\mathcal{E} \cap \mathcal{F} = \mathcal{E}$$

$$P(\mathcal{E} \mid \mathcal{F}) = \frac{P(\mathcal{E} \cap \mathcal{F})}{P(\mathcal{F})} = \frac{P(\mathcal{E})}{P(\mathcal{F})}$$

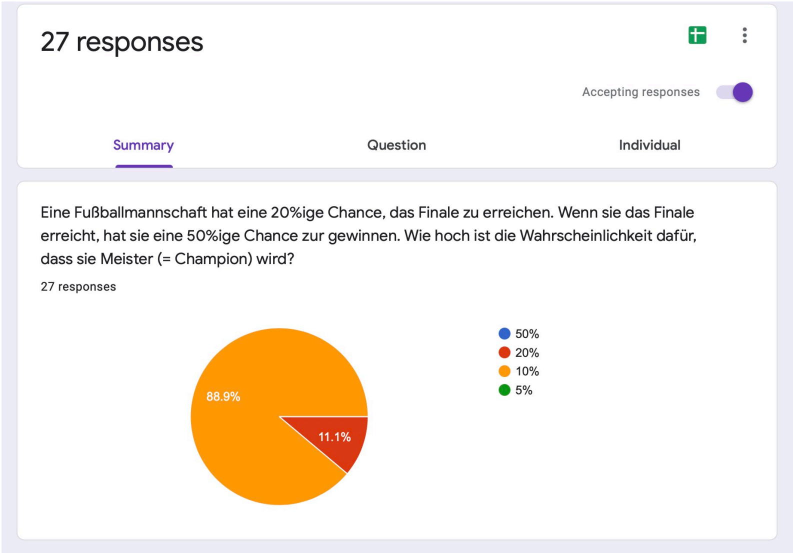
$$= \frac{\dfrac{\#\mathcal{E}}{\cancel{\#\Omega}}}{\dfrac{\#\mathcal{F}}{\cancel{\#\Omega}}} = \frac{\#\mathcal{E}}{\#\mathcal{F}} = \frac{1}{3}$$

Fußballmeister

werner.nutt@gmail.com (not shared) Switch account

Eine Fußballmannschaft hat eine 20%ige Chance, das Finale zu erreichen. Wenn sie das Finale erreicht, hat sie eine 50%ige Chance zur gewinnen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie Meister (= Champion) wird?

- 50%
- 20%
- 10%
- 5%



Quiz 8: **Fußballmeister**

M Meister

G gewinnt Finale

F erreicht Finale

$$P(G|F) = \frac{1}{2} = \frac{P(GF)}{P(F)}$$

$$M = FG$$

$$P(F) = \frac{2}{10}$$

$$P(M) = P(FG) = \frac{P(FG)}{P(F)} \cdot P(F)$$

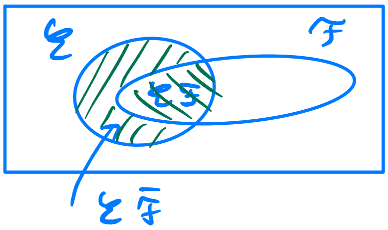
$$= P(G|F) \cdot P(F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{10} = 10\,\%$$

$$P(GF) = P(G|F) \cdot P(F)$$

1.5 Der Satz von Bayes (Bayes' Theorem)

$\mathfrak{E}, \mathfrak{F} \Rightarrow \mathfrak{E} = \mathfrak{E}\mathfrak{F} \overset{+}{\cup} \mathfrak{E}\overline{\mathfrak{F}}$

disjunkte Vereinigung



Gesetz der totalen W.keit
law of total probability
LOTP

$$\Rightarrow \boxed{P(\mathfrak{E}) = P(\mathfrak{E}\mathfrak{F}) + P(\mathfrak{E}\overline{\mathfrak{F}}) = P(\mathfrak{E}\mid\mathfrak{F})\,P(\mathfrak{F}) + P(\mathfrak{E}\mid\overline{\mathfrak{F}})\,P(\overline{\mathfrak{F}})}$$

Also: Berechne $P(\mathfrak{E})$ durch Fallunterscheidung nach $\mathfrak{F}$
case analysis

Beispiel 15 Versicherungsgesellschaft (insurance company)

2 Arten von Kunden

Vorsichtige (prudent)	70 %	$\mathfrak{V}$
Risikofreudige (risk takers)	30 %	$\mathfrak{R} = \overline{\mathfrak{V}}$

Pro Jahr haben $\left\{\begin{array}{l} 20\ \%\ \text{der Vorsichtigen} \\ 40\ \%\ \text{der Risikofreudigen} \end{array}\right\}$ einen Unfall (accident)
Ereignis $\mathfrak{U}$

$$P(\mathfrak{U}) = P(\mathfrak{U}\mathfrak{V}) + P(\mathfrak{U}\mathfrak{R})$$
$$= P(\mathfrak{U}\mid\mathfrak{V})\,P(\mathfrak{V}) + P(\mathfrak{U}\mid\mathfrak{R})\,P(\mathfrak{R})$$
$$= 0{,}2 \times 0{,}7 + 0{,}4 * 0{,}3$$
$$= 0{,}14 + 0{,}12 = 0{,}26$$

Aktualisierung von Einschätzungen

Updating Beliefs

<u>Beispiel 16:</u> Ein Kunde hatte einen Unfall.

Was ist die W.keit, dass er risikofreudig war?