## 1.3 Gleichverteilte W.keiten

(Uniformly distributed probabilities)

Oft alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich

(nur möglich wenn $\# S < \infty$)

Etwa $\# S = \{\underbrace{1, \ldots, n}_{\text{Ergebnisse}}\}$

Was ist $P(\{i\})$ ? (für $i = 1, \ldots, n$)

$$P(\{i\}) = \frac{1}{n}$$

Die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 muss gleichmäßig auf die Ergebnisse verteilt werden

$$E \subseteq S \Rightarrow P(E) = \frac{\# E}{\# S}$$

Bestimme $\# E$!

### Produktregel der Kombinatorik

\# Ergebnisse = ?

- Würfeln mit 2 oder 3 Würfeln
- Wähle eine Karte, dann andere

$\# S$

- 2 Würfel : $6^2 = 36$
- 3 —"— : $6^3 = 36$
- 3 Karten aus 52, nacheinander
  (Reihenfolge wichtig : ♡A, ◇K ≠ ◇K, ♡A)

  1\. Karte : 52
  2\. Karte : 51
  3\. Karte : 50

  $\left.\begin{matrix} 52 \\ 51 \\ 50 \end{matrix}\right\}$ insg. $52 \times 51 \times 50$

- 52 aus 52 : | 52 | 51 | ... | 1 |

  1 2 ... 52

  $52 \times 51 \times \cdots \times 1 = 52!$ "52 Fakultät"

In einer Kiste sind 8 schwarze und 7 weiße Socken. Wir wählen zufällig zwei nacheinander aus, d. h. erst eine, dann eine zweite. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jede Socke eine andere Farbe hat?

- ○ 1/14
- ○ 4/15
- ○ 7/15
- ○ 8/15
- ○ 8/14

## Quiz: Schwarze und weiße Socken

8 schw. Socken
7 w. Socken
15 Socken insgesamt

$\mathcal{E}$ = "Pairs of different colour"
= "Paare verschiedener Farbe"

2 Möglichkeiten

weiß, dann schwarz $7 \times 8$
schw, dann weiß $8 \times 7$

$\# \mathcal{E} = 7 \times 8 + 8 \times 7$

$\# \mathcal{S} = 15 \times 14$

$$P(\mathcal{E}) = \frac{\# \mathcal{E}}{\# \mathcal{S}} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{7} \times 8}{15 \times \cancel{14}} = \frac{8}{15}$$

$$P(\bar{\mathcal{E}}) = 1 - P(\mathcal{E}) = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$$

**Beispiel 6:** 10 Bücher: $\quad n! = n$ Fakultät

4 Informatik, 3 Mathematik, 2 Statistik, 1 Geschichte

Aufstellung auf Regal: Bücher zum gleichen Thema sollen zusammen stehen, z. B.

$$G \quad M_3 M_1 M_2 \quad I_2 I_4 I_1 I_3 \quad S_2 S_1$$

Wie viele Arten?

1.) 4 Sorten von Büchern: Anordnung der Sorten

4 Plätze für 4 Sorten: $4!$

2.) # Anordnungen für

Inf: $4!$

Math: $3!$

Stat: $2!$

G. : $1!$

$$4! \; 3! \; 2! \; 1! \; 4!$$

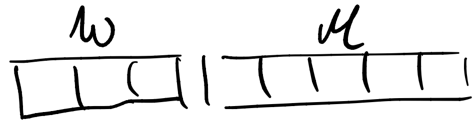
**Beispiel 7** Kurs mit 5 männlichen, 3 weiblichen Studenten

Prüfung: alle Studenten erhalten unterschiedlichen Noten

$$P\Big(\underbrace{\text{"Studentinnen erhalten die besten Noten"}}_{\mathcal{E}}\Big) = ?$$

$\mathcal{S}$ = alle möglichen Rangordnungen $\Rightarrow \#\mathcal{S} = 8!$

$\mathcal{E}$ = Rangordnungen mit Studentinnen an der Spitze

$\mathcal{E}$ 


$$\#\mathcal{E} = 3! \times 5!$$

$$P(\mathcal{E}) = \frac{\#\mathcal{E}}{\#\mathcal{S}} = \frac{3! \times 5!}{8!} = \frac{3! \times \cancel{5!}}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}} = \frac{\cancel{3 \cdot 2} \cdot 1}{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}} = \frac{1}{8 \cdot 7}$$

$$= \frac{1}{56}$$

Beispiel 7, 2. Ansatz (approach)

Wir wählen eine Gruppen von 3 Studenten aus 8 aus.
feste
Was ist die Wahrsch.keit, dass eine bestimmte Gruppe gewählt wird?

$\mathcal{S}$ = alle 3er Gruppen aus der Menge von 8 Studenten

$\mathcal{E}$ = die Gruppe der 3 weibl. Studenten $\Rightarrow \# \mathcal{E} = 1$

$$p(\mathcal{E}) = \frac{\# \mathcal{E}}{\# \mathcal{S}} = \frac{1}{\# \mathcal{S}}$$ ! Was ist $\# \mathcal{S}$ ?

Wie viele 3er-Gruppen können aus 8 Studenten gewählt werden?

1.) Geordnete Auswahlen: $8 \cdot 7 \cdot 6$

2.) Reihenfolge nicht wichtig
$\Rightarrow$ Wie oft kommt dieselbe Gruppe vor?

Die drei Studentinnen seien Mary, Jane und Paula:
Die drei Studentinnen können auf $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ Arten ausgewählt werden:

| | | |
|---|---|---|
| M, J, P | J, P, M | P, M, J |
| M, P, J | J, M, P | P, J, M |

Die Anzahl der möglichen 3er-Gruppen, die aus 8 Objekten ausgewählt werden können, ist also

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

geordnete Auswahlen

Anordnungen, die zur selben Gruppe führen

Schreibweise ("Notation")

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \binom{8}{3}$$ "8 über 3"
"8 choose 3"

$$\binom{8}{3} = \frac{(8 \cdot 7 \cdot 6) \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{8!}{3!\ 5!} = \frac{8!}{5!\ 3!}$$

$$= \frac{(8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1)}{(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1)} = \binom{8}{5}$$

Allgemein: "n über k" "n choose k"

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots (n-k-1)}{k!} = \frac{n!}{k!\ (n-k)!}$$

Anwendung:

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y) \cdots (x+y)}_{n \text{ Faktoren}}$$

$$= \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \ldots \binom{n}{n} x^0 y^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Binomialkoeffizienten

binomial coefficients