# PTS Vorlesung – Kap 1

## 1. Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

W. theorie gibt uns

- Konzepte, um über Unsicherheit zu sprechen
  (Glücksspiele,
  wiederkehrende variierende Ereignisse, z. B. Messungen,
  Kugeln auf dem Galton-Brett)
- Methoden, um Unsicherheit zu quantifizieren

Beispiel: Würfeln mit Würfel $W$

Was ist $P(W=4)$

probability, Wahrscheinlichkeit

$P(W \geq 4)$

$P(W < 4)$

Bedeutung:

1) Bei vielen Wiederholungen ist $\frac{1}{6}$ der Ergebnisse $= 4$
2) Es gibt die Möglichkeit von 1 aus 6, dass 4 oben liegt

frequentistische    subjektive (Bayes'sche)

Sichtweise

Keine Konsequenz für die Mathematik

## 1.1 Ereignisse (Events)

Bei einem Experiment:

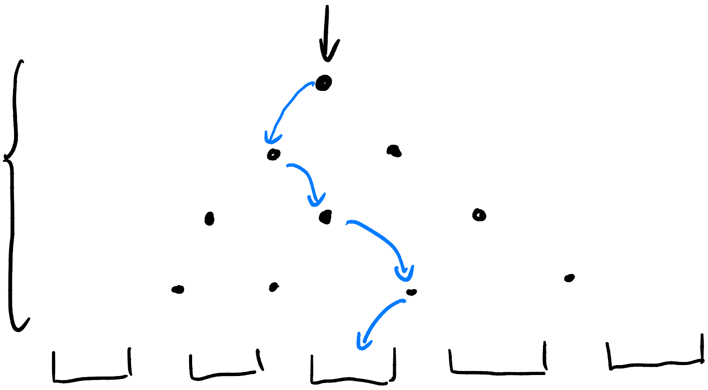
$S$ Stichprobenraum (sample space) (= Menge der möglichen Ergebnisse (outcomes))

Beispiele:

- Werfen eines Würfels: $S = \{1, 2, 3, \ldots, 6\}$   $\#S = 6$
- Werfen zweier Würfel: $S = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,6), (2,1), \ldots, \vdots, (6,1), \ldots, (6,6)\}$   $\#S = 36$

# Galton-Brett

4 Ebenen



n

Ergebnisse: 0 1 2 3 4 0 … n

$\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, 4\}$

$\mathcal{S} = \{0, \dots, n\}$

$\# \mathcal{S} = n+1$

$\mathcal{S}$ kann unendlich sein!

- Messen von Entfernungen: alle $m > 0$
- Messen von Personen: alle $m \in [0{,}5; 3{,}00]$

sind mögliche Ergebnisse

- \# Würfe mit Würfel bis zur ersten 6:

  $\{1, 2, \dots, 783, \dots, \infty\}$

## Ereignisse (events)

- Wurf einer geraden Zahl $\mathcal{E}_{gerade} = \{2, 4, 6\}$
- Wurf von zwei gleichen Zahlen

$$\mathcal{E}_{gleich} = \{(1,1), (2,2), \dots, (6,6)\}$$

Allgemein: $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$ Ereignisse sind Mengen von Ergebnissen

$\mathcal{E}$ tritt ein (happens) wenn Ergebnis $\in \mathcal{E}$

bei Experiment

Mengenoperationen auf Ereignissen

$\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ Vereinigung (union) ("oder")

$\mathcal{E} \cap \mathcal{F}$, $\mathcal{E}\mathcal{F}$ Durchschnitt (intersection) ("und")

$\mathcal{E} \setminus \mathcal{F}$ Differenz (difference) ("und nicht")

$\bar{\mathcal{E}}$ Komplement (complement) ("nicht")

lies: "$\bar{E}$ quer"

$\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{S} \setminus \mathcal{E}$

$$\mathcal{E} \setminus \mathcal{F} = \mathcal{E} \cap \bar{\mathcal{F}} = \mathcal{E}\bar{\mathcal{F}}$$

Beispiele (Würfeln):

$$\mathcal{E}_{prim} = \{2, 3, 5\}$$

$$\mathcal{E}_{gerade} \cup \mathcal{E}_{prim} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\mathcal{E}_{gerade} \cap \mathcal{E}_{prim} = \{2\}$$

$$\overline{\mathcal{E}_{prim}} = \{1, 4, 6\}$$

Spezialfall: $\emptyset \in \mathcal{S}$ ist das unmögliche (impossible) oder leere (empty) Ereignis

Wir sagen: $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ sind disjunkt, wenn $\mathcal{E} \cap \mathcal{F} = \emptyset$
"$\mathcal{E}$ geschnitten $\mathcal{F}$"

Eigenschaften der Operationen:

$$\overline{\mathcal{S}} = \emptyset, \quad \overline{\emptyset} = \mathcal{S}$$

$$\overline{\overline{\mathcal{E}}} = \mathcal{E}$$

$$\overline{\mathcal{E} \cup \mathcal{F}} = \overline{\mathcal{E}} \cap \overline{\mathcal{F}}, \quad \overline{\mathcal{E} \cap \mathcal{F}} = \overline{\mathcal{E}} \cup \overline{\mathcal{F}}$$

(De Morgansche Gesetze)

Äquivalenz

$$\mathcal{E} \equiv \mathcal{F} \iff \mathcal{E} \subseteq \mathcal{F} \text{ und } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$$

## 1.2 Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie

$P(\mathcal{E})$, die Wahrscheinlichkeit von $\mathcal{E}$, ist eine reelle Zahl

A1: $0 \leq P(\mathcal{E}) \leq 1$

A2: $P(\mathcal{S}) = 1$

A3: Wenn $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots$ paarweise disjunkt sind,
$(\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_j = \emptyset$ für $i \neq j)$

dann ist

$$P(\mathcal{E}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{E}_n) = P(\mathcal{E}_1) + \cdots + P(\mathcal{E}_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(\mathcal{E}_i) \quad \text{für alle } n$$

(Gilt auch für unendliche Summen)

$P(\emptyset) = ?$

$\mathcal{S} \cap \emptyset = \emptyset$

$\Rightarrow \; P(\mathcal{S}) = P(\mathcal{S} \cup \emptyset) = P(\mathcal{S}) + P(\emptyset)$

$\Rightarrow \; 0 = P(\emptyset)$

Auch

$$P(\mathcal{E}_{\text{gerade}} \cup \{1\}) = P(\mathcal{E}_{\text{gerade}}) + P(\{1\})$$

**Satz 1** (Proposition 1): $P(\overline{\mathcal{E}}) = 1 - P(\mathcal{E})$

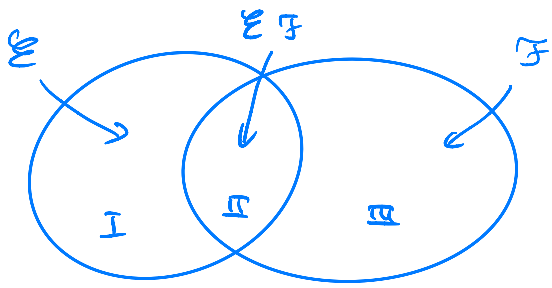
Beweis (proof):

$$\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{E}} = \emptyset \quad , \quad \mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}} = \mathcal{S}$$

$$\Rightarrow \quad P(\mathcal{E}) + P(\overline{\mathcal{E}}) = P(\mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}}) = P(\mathcal{S}) = 1$$

$$\Rightarrow \quad P(\overline{\mathcal{E}}) = 1 - P(\mathcal{E}) \qquad \square$$

**Satz 2:** $P(\mathcal{E} \cup \mathcal{F}) = P(\mathcal{E}) + P(\mathcal{F}) - P(\mathcal{E}\mathcal{F})$




$$P(\mathcal{E} \cup \mathcal{F}) = P(\mathrm{I} \cup \mathrm{II} \cup \mathrm{III})$$

$$= P(\mathrm{I}) + P(\mathrm{II}) + P(\mathrm{III}) \qquad \text{Ax 3}$$

$$P(\mathcal{E}) = P(\mathrm{I}) + P(\mathrm{II}) \quad , \quad P(\mathcal{F}) = P(\mathrm{III}) + P(\mathrm{II}) \qquad \text{Ax 3}$$

$$\Rightarrow \quad P(\mathcal{E} \cup \mathcal{F}) = P(\mathrm{I}) + P(\mathrm{II}) + P(\mathrm{III})$$

$$P(\mathcal{E}) + P(\mathcal{F}) = P(\mathrm{I}) + P(\mathrm{II}) + P(\mathrm{III}) + P(\mathrm{II})$$

$$P(\mathrm{II}) = P(\mathcal{E}\mathcal{F})$$

Beispiel 3:

Trinker - Quiz

$\mathcal{B}$ Biertrinker $\qquad$ $\mathcal{W}$ Weintrinker

$$P(\mathcal{B} \cup \mathcal{W}) = P(\mathcal{B}) + P(\mathcal{W}) - P(\mathcal{B}\mathcal{W})$$
$$= 0{,}68 + 0{,}49 - 0{,}35$$
$$= 0{,}68 + 0{,}14 = 0{,}82$$

## 1.3 Gleichverteilte W.keiten (Uniformly distributed Probabilities)

Oft sind alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich

(nur möglich wenn $\# \mathcal{S} < \infty$)

Sei $\# \mathcal{S} = n$, etwa $\mathcal{S} = \{1, \dots, n\}$

$$\Rightarrow P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{n\}) = p > 0$$

$$\Rightarrow 1 = P(\mathcal{S}) = P(\{1, \dots, n\}) = P(\underbrace{\{1\} \cup \dots \cup \{n\}}_{\text{disjunktes System von Mengen}})$$
$$= P(\{1\}) + P(\{2\}) + \dots + P(\{n\}) = n \cdot p$$
$$\Rightarrow p = \frac{1}{n} = P(\{i\}), \quad 1 \le i \le n$$

Allgemeiner:

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S} \Rightarrow P(\mathcal{E}) = \frac{\# \mathcal{E}}{n} = \frac{\# \mathcal{E}}{\# \mathcal{S}}$$

# Produktregel der Kombinatorik

\# Ergebnisse = ?

- Werfen von 2 oder 3 Würfeln
- Wähle eine Karte, dann eine zweite

. . . .

Prinzip: Experiment $E_1$ habe $m$ Ergebnisse
— " — $E_2$ — " — $n$ — " —

\# Ergebnisse von "erst $E_1$, dann $E_2$" = $m \times n$

$$(1,1), \ldots, (1,n)$$
$$\vdots$$
$$(m,1), \ldots (m,n)$$

Allgemein: $E_i$ habe $n_i$ Ergebnisse

$\Rightarrow$ $E_1$, dann $E_2, \ldots,$ dann $E_r$ hat $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r$ Ergebnisse

Quiz 3: Kiste mit Socken

$$P(\underbrace{\text{2 Socken mit verschiedenen Farben}}_{\mathcal{E}}) = \frac{\# \mathcal{E}}{\# \mathcal{S}}$$

8 schwarz, 7 weiß

$\mathcal{S}$ = genommene Paare: erstes, dann zweites

$\Rightarrow$ $\# \mathcal{S} = 15 \times 14$

$\mathcal{E}$ = Paare mit $(1. = w \wedge 2. s) \dot{\cup} (1. = s \wedge 2. = w)$

$\Rightarrow$ $\# \mathcal{E} = 7 \times 8 + 8 \times 7 = 2 \times 7 \times 8$

$$\frac{\# \mathcal{E}}{\# \mathcal{S}} = \frac{2 \times 7 \times 8}{15 \times 14} = \frac{8}{15}$$

## Quiz 4: Wie viele Wörter?

# Wörter = # Möglichkeiten für 1es Bit $\quad 2$

$\times$ # —— " —— —" — 2es Bit $\quad \times\ 2$

. . .

$\times$ # —— " —— 32es Bit $\quad \times \cdots \times\ 2$

$= 2^{32}$ // $2^{10} = 1024 \approx 1000 = 10^3$

$= 2^{30} \cdot 2^2 = (2^{10})^3 \cdot 2^2$

$\approx (10^3)^3 \cdot 2^2 = 4.000.000.000$

(4 Mrd.)

## Quiz 5: Menschen im Aufzug

$P(\underbrace{\text{"alle raus im selben Stock"}}_{\mathcal{E}})$

$\mathcal{E}_i$ = "alle raus im $i$-ten Stock" $\quad (i = 1, \dots, 4)$

$\mathcal{S} = \{ (s_1, s_2, s_3, s_4) \mid s_i \in \{1, \dots, 4\},\ i = 1, \dots, 4 \}$

$= \{ (1,1,1,1), (1,1,1,2), \dots, (4,4,4,4) \}$

$\#\mathcal{S} = 4^4$ // allgemein: $s$ = # Stockwerke, $p$ = # Personen $\Rightarrow \#\ s^p$

$\mathcal{E}_i = \{(i,i,i,i)\} \Rightarrow \#\mathcal{E}_i = 1$

$\mathcal{E} = \biguplus_{i=1}^{s} \mathcal{E}_i \Rightarrow \#\mathcal{E} = s$

$\biguplus$ = disjunkte Vereinigung, d.h., die $\mathcal{E}_i$ sind paarweise disjunkt

$$p(\mathcal{E}) = \frac{\#\mathcal{E}}{\#\mathcal{S}} = \frac{s}{s^p} = \frac{1}{s^{p-1}} = s^{1-p}$$

Hier: $s = 4,\ p = 4 \Rightarrow p(\mathcal{E}) = 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

# Permutationen

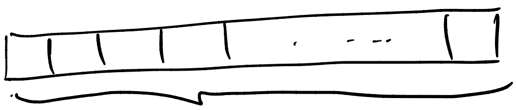
Wie viele Möglichkeiten gibt es, $n$ Objekte in einer Reihe anzuordnen?

Etwa $n$ Zahlen?

Beispiel $n=3$: 1, 2, 3; 2, 1, 3; 3, 1, 2

1, 3, 2; 2, 3, 1; 3, 2, 1

Prinzip: $n$ Positionen, $n$ Zahlen:



Pos 1: $n$ Möglichkeiten

Pos 2: $n-1$ — " —

...

Pos $n$: 1 — " —

Insgesamt (Produktregel):

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$

## Beispiel 6:

10 Bücher: 4 Informatik, 3 Mathe, 2 Statistik, 1 Geschichte

Aufstellung so, dass Bücher zum selben Thema zusammen stehen.

Etwa: SSIIIIGMMM.

Wie viele Arten?

- Permutationen der Themen: $4!$
- Permutationen innerhalb der Themen, z.B.

| | |
|---|---|
| I | $4!$ |
| M | $3!$ |
| S | $2!$ |
| G | $1!$ |

$$\# \text{Aufstellungen} = \overbrace{4!}^{\text{Themen}} \; \overbrace{4!\; 3!\; 2!\; 1!}^{\text{innerhalb der Themen}}$$

$$= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 2^2$$

$$= 2^8 \cdot 3^2 = 256 \cdot 27 \approx 250 \cdot 28 =$$

$$= 250 \cdot 4 \cdot 7 = 7 \cdot 1000 = 7000$$

## Beispiel 7

Kurs mit 5 männlichen, 3 weiblichen Studenten.

Prüfung: alle Studenten hatten unterschiedliche Noten

$$P(\underbrace{\text{"Studentinnen hatten die besten Noten"}}_{\mathcal{E}}) = ?$$

$\mathcal{S}$ = alle möglichen Rangordnungen $\Rightarrow \#\mathcal{S} = 8!$

R.o.en mit Studentinnen an der Spitze:

| W | M |
|---|---|
| $3!$ | $5!$ |

$$P(\mathcal{E}) = \frac{\#\mathcal{E}}{\#\mathcal{S}} = \frac{3!\,5!}{8!} = \frac{3!\,\cancel{5!}}{8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5!}} = \frac{\cancel{3!}}{8\cdot 7\cdot \cancel{6}} = \frac{1}{56}$$

## Beispiel 7, 2. Ansatz (approach)

Wir wählen zufällig 3 Studenten als die besten aus.

Was ist die W.keit, dass eine bestimmte Menge gewählt wird?

D.h., wie viele Arten gibt es, von 8 Objekten 3 auszuwählen?

1.) Wähle 3 Objekte nacheinander:

$8 \cdot 7 \cdot 6$ Arten

2.) Eine Menge von 3 Objekten kann auf $3!$ Arten angeordnet werden.

abc, acb, bac, bca, cab cba

Insgesamt: $$\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{(8\cdot 7\cdot 6)\cdot(5\cdot 4\cdot\dots\cdot 1)}{(3\cdot 2\cdot 1)\cdot(5\cdot 4\cdot\dots\cdot 1)} = \frac{8!}{3!\,5!}$$

$$= \binom{8}{3} = \binom{8}{5}$$ "8 über 3" ("8 choose 3")

$$\frac{8!}{5!\,3!}$$

Allgemein: Wähle $k$ von $n$ Objekten

"$n$ über $k$"

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

"$n$ choose $k$"

Binomialkoeffizienten

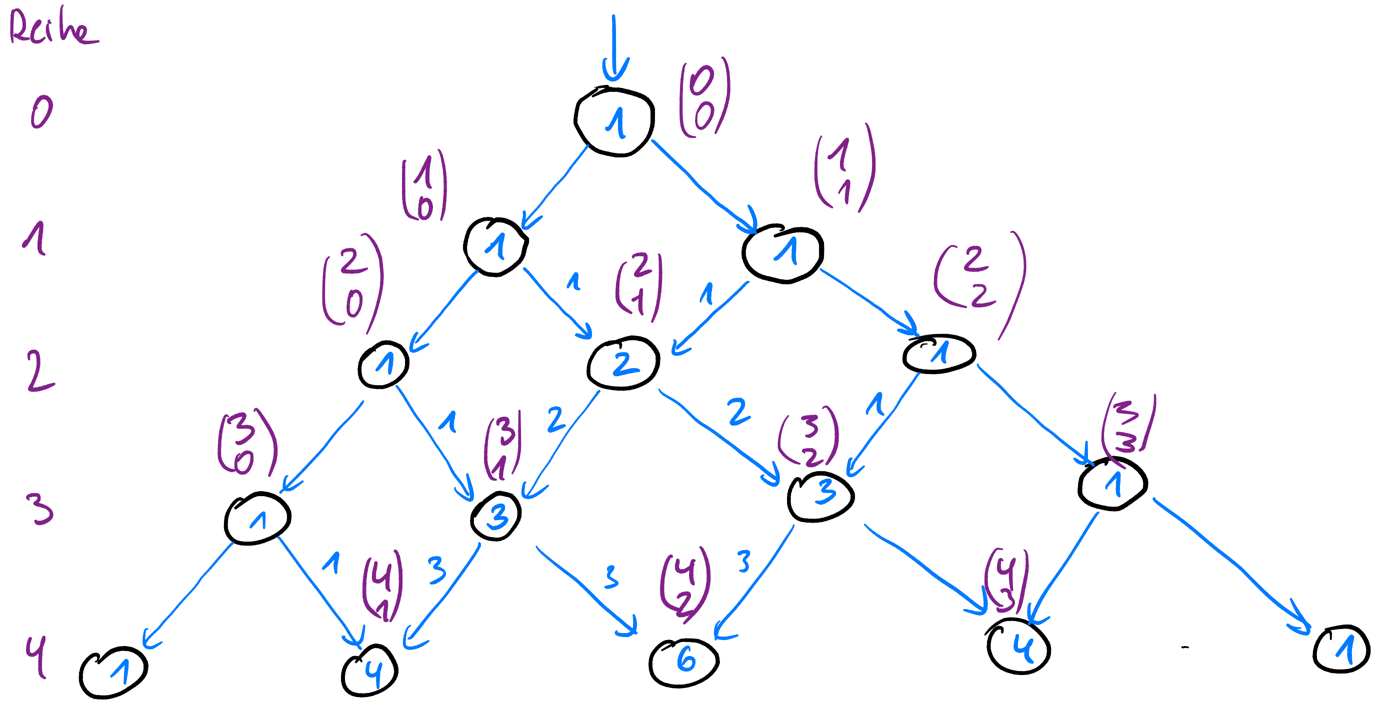
binomial coefficients

$$\underbrace{(x+y)}_{\text{Binom}}{}^{n} = (x+y)(x+y)\cdots(x+y)$$

$$= \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots \binom{n}{0}x^0 y^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

Galtonbrett: Wie viele Pfade führen zu jedem Nagel?




Um in der $n$-ten Reihe zum $k$-ten Nagel zu gelangen, müssen wir $k$-mal nach rechts gehen.

Wir müssen also $k$ Reihen von $n$ auswählen.

**Beobachtung:**

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

**Warum?**

Beweis: Wir erzählen eine Geschichte (proof by story)

- $n$ Leute
- bilde ein Team aus $k$ Personen: $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten

  Fred $\in$ Leute; 2 Fälle: $=$

  - Fred $\in$ Team
    wähle weitere $k-1$ Personen aus $n-1$: $\binom{n-1}{k-1}$ Möglichkeiten

    $+$

  - Fred $\notin$ Team
    wähle alle $k$ Personen aus $n-1$: $\binom{n-1}{k}$ Möglichkeiten

<u>Beispiel 9</u>: Gruppe von 5 Männern, 8 Frauen.
Wähle zufällig (randomly) 5 Personen

$$P(\text{"2 Männer, 3 Frauen werden ausgewählt"}) = ?$$

$\mathcal{E}$

$\mathcal{S}$ = Auswahlen (choices) von 5 aus 13 Personen

$$\# \mathcal{S} = \binom{13}{5}$$

$\mathcal{E}$ = "2 Männer von 5" $\wedge$ "3 Frauen von 8"

$$\# \mathcal{E} = \binom{5}{2} \cdot \binom{8}{3}$$

$$P(\mathcal{E}) = \frac{\binom{5}{2}\binom{8}{3}}{\binom{13}{5}} = \frac{5 \cdot \cancel{4}^{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot 13 \cdot \cancel{12} \cdot 11 \cdot \cancel{10} \cdot 9}$$

$$= \frac{5 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 7}{13 \cdot 11 \cdot 9} = \frac{10 \cdot 56}{13 \cdot 99} = \frac{560}{1287}$$

# Gleichverteilte Wahrscheinlichkeiten: Zusammenfassung

$\# \mathcal{S} < \infty$, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(\mathcal{E}) = \dfrac{\# \mathcal{E}}{\# \mathcal{S}}$

$\Rightarrow$ Problem: Wie viele Elemente / Ergebnisse haben $\mathcal{E}$ und $\mathcal{S}$?

Häufig: Gegeben $n_i$ Objekte, $i = 1, \dots, k$; wähle $k$-mal hintereinander je 1 Objekt aus $n_i$ aus

Speziell: Mengen von $n$ Objekten

2 Unterscheidungen
- zurücklegen oder nicht zurücklegen
- Reihenfolge wichtig oder nicht

2 Unterscheidungen
- zurücklegen oder nicht zurücklegen
- Reihenfolge wichtig oder nicht

| Reihenfolge | zurück legen | nicht zurück legen |
|---|---|---|
| wichtig | $\underbrace{n \cdot n \cdot \dots n}_{k\text{-mal}} = n^k$ | $n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$ |
| nicht wichtig | $\binom{n+k-1}{k}$ * <br> Auswahl von Multimengen: <br> $\{\{1,1,3,5\}\}$, <br> $\{\{1,4,4,4\}\}$ | wähle eine Menge von $k$ Objekten aus $n$ Objekten aus <br> $\dfrac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$ <br> Auswahl von Mengen: <br> $\{1,3,7,8\} \subseteq \{1, \dots, 10\}$ |

* schwierig herzuleiten

Beispiel 10: Gegeben $n$ Personen, eine davon ist Karl. Wähle $k$ Personen aus.

$$P(\text{"Karl} \in \text{Auswahl"}) = ?$$

$\mathcal{S}$ = alle Teilmengen der Größe $k$ $\Rightarrow$ $\#\mathcal{S} = \binom{n}{k}$

$\mathcal{E}$ = alle Teilmengen der Größe $k$ mit Karl
(nur $k-1$ Personen sind auszuwählen aus $n-1$

$$\#\mathcal{E} = \binom{n-1}{k-1}$$

$$P(\mathcal{E}) = \frac{\#\mathcal{E}}{\#\mathcal{S}} = \frac{k \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(k-1)!}\,\underbrace{(n-1-(k-1))!}_{\cancel{(n-k)!}}} \cdot \frac{\cancel{k!}\,\cancel{(n-k)!}}{\cancel{n!}\,n} = \frac{k}{n}$$

## 1.4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

(conditional probabilities)

2 Würfel

$$P(w_1 + w_2 = 8) = \frac{\#\{(2,6), (3,5), \dots, (6,2)\}}{\#\mathcal{S}} = \frac{5}{36}$$

Angenommen, wir wissen $w_1 = 3$:

$$P(w_1 + w_2 = 8 \mid \underbrace{w_1 = 3}_{\text{Bedingung / condition}}) = ?$$

Neuer Stichprobenraum $\mathcal{S}' = \{(3,1), (3,2), \dots, (3,6)\}$
$\Rightarrow \#\mathcal{S}' = 6$

$\mathcal{E}' = \{(3,5)\} \Rightarrow \#\mathcal{E}' = 1$

$$P(w_1 + w_2 = 8 \mid w_1 = 3) = \frac{\#\mathcal{E}'}{\#\mathcal{S}'} = \frac{1}{6}$$

$$P(\mathcal{E} \mid \mathcal{F})$$

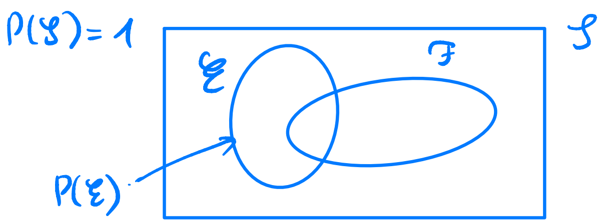
„W.keit von $\mathcal{E}$ unter der Bedingung $\mathcal{F}$"

„ . . . . . gegeben $\mathcal{F}$"

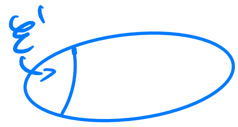
„ . . . . . wenn $\mathcal{F}$"

**Definition 11**: Seien $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ Ereignisse, $P(\mathcal{F}) > 0$

$$P(\mathcal{E} \mid \mathcal{F}) = \frac{P(\mathcal{E} \cap \mathcal{F})}{P(\mathcal{F})}$$




Ab jetzt betrachten wir nur noch Ergebnisse in $\mathcal{F}$:



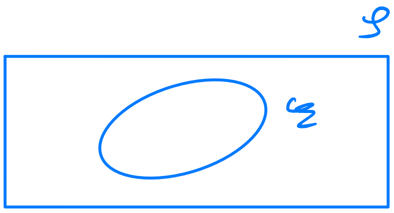

$\mathcal{S}' = \mathcal{F}$

$\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cap \mathcal{F}$

Normalisiere $P$ zu $P' = P(\cdot \mid \mathcal{F})$, so dass $P(\mathcal{S}') = 1$

$$P'(\mathcal{E}) = P(\mathcal{E} \mid \mathcal{F}) = \frac{P(\mathcal{E}')}{P(\mathcal{S}')} = \frac{P(\mathcal{E} \cap \mathcal{F})}{P(\mathcal{F})}$$

# Intuition: Wahrscheinlichkeiten sind Proportionen




Wahrscheinlichkeit von $\mathcal{E}$:

$=$ relative Größe von $\mathcal{E}$ im Vergleich zu $\mathcal{S}$

$=$ Anteil von $\mathcal{E}$ an $\mathcal{S}$

$$= \frac{\text{Größe } \mathcal{E}}{\text{Größe } \mathcal{S}}$$

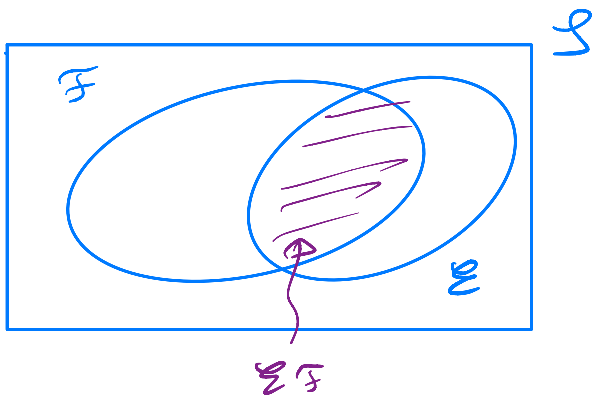
$P(\mathcal{E})$ = die Proportion von Ergebnismengen

W.theorie: Messen der relativen Größe von Ergebnismengen

$\longrightarrow$ 3 blue one brown, Kanal auf Youtube, Satz von Bayes

## Bedingte W.keiten: Anpassung der Proportionen

Conditional Probabilities: Adjustment of Proportions




$P(\mathcal{E})$ = Proportion von $\mathcal{E}$ zu $\mathcal{S}$

Annahme: $\mathcal{F}$ ist eingetreten

$P'(\mathcal{E})$ = Proportion von $\mathcal{E} \cap \mathcal{F}$ zu $\mathcal{F}$

oder

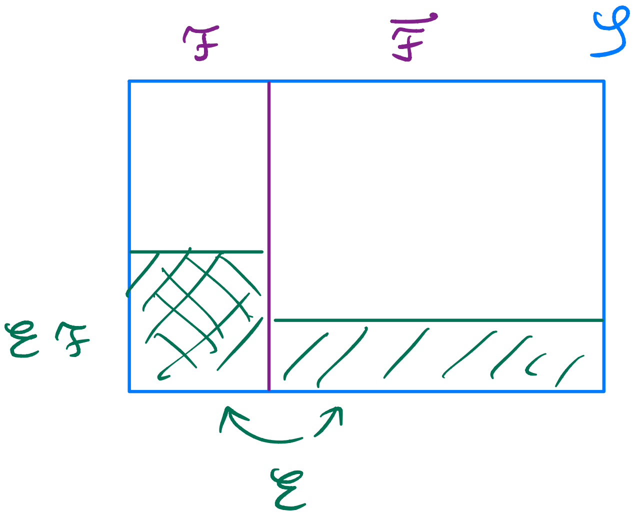
$P'(\mathcal{E}) = P(\mathcal{E} | \mathcal{F})$ ist der Anteil von $\mathcal{E} \cap \mathcal{F}$ an $\mathcal{F}$

$$P'(\mathcal{E}) = P(\mathcal{E} | \mathcal{F}) = \frac{P(\mathcal{E} \cap \mathcal{F})}{P(\mathcal{F})}$$

Bei Gleichverteilung:

$$P(\mathcal{E} | \mathcal{F}) = \frac{P(\mathcal{E} \cap \mathcal{F})}{P(\mathcal{F})} = \frac{\frac{\# \mathcal{E}\mathcal{F}}{\# \mathcal{S}}}{\frac{\# \mathcal{F}}{\# \mathcal{S}}} = \frac{\# \mathcal{E}\mathcal{F}}{\# \mathcal{F}}$$

# A-priori und A-posteriori Wahrscheinlichkeit




$P(\mathcal{E})$ A-priori W.keit
prior (prob.)
von $\mathcal{E}$

$P(\mathcal{E}|\mathcal{F})$ A-posteriori W.keit
posterior (p.)
von $\mathcal{E}$

**Beispiel 12:** Kiste mit 32 Transistoren

20 intakt (working) 4 defekt 8 teilweise defekt (partly deficient)

Experiment:

- Nimm 1 Transistor
- Angenommen er funktioniert.
  Was ist die W.keit, dass er intakt ist?

Ereignisse: $\mathcal{I}, \mathcal{D}, \mathcal{T}$ (Nimm einen intakten, ... Transistor)

$$P(\mathcal{I}|\overline{\mathcal{D}}) = \frac{P(\mathcal{I}\cap\overline{\mathcal{D}})}{P(\overline{\mathcal{D}})} = \frac{P(\mathcal{I})}{P(\mathcal{I}\cup\mathcal{T})} = \frac{\frac{20}{32}}{\frac{28}{32}}$$

$$= \frac{20}{28} = \frac{5}{7}$$

Quiz: Münzwurf

$$\mathcal{S} = \{ (K,K), (K,Z), (Z,K), (Z,Z) \}$$

$$P(\underbrace{2 \times \text{Kopf}}_{\mathcal{E}} \mid \underbrace{\geq 1 \times \text{Kopf}}_{\mathcal{F}}) =$$

$$= \frac{P(\mathcal{E}\mathcal{F})}{P(\mathcal{F})} = \frac{P(2 \times \text{Kopf})}{P(\geq 1 \times \text{Kopf})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Quiz 8: Fußballmeister

$\mathcal{M}$ Meister

$\mathcal{G}$ Gewinn der Meisterschaft

$\mathcal{F}$ Erreichen des Finales

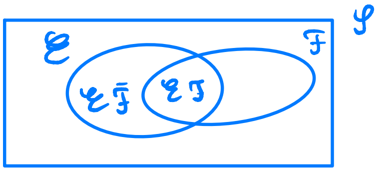
$$P(\mathcal{M}) = P(\mathcal{F}\mathcal{G}) = \frac{P(\mathcal{F}\mathcal{G})}{P(\mathcal{F})} \cdot P(\mathcal{F})$$

$$= P(\mathcal{G} \mid \mathcal{F}) \cdot P(\mathcal{F})$$

$$= 0,5 \times 0,2 = 0,1$$

## 1.5 Der Satz von Bayes

$\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ Ereignisse $\Rightarrow \mathfrak{E} = \mathfrak{E}\mathfrak{F} \uplus \mathfrak{E}\bar{\mathfrak{F}}$




$$\Rightarrow P(\mathfrak{E}) = P(\mathfrak{E}\mathfrak{F}) + P(\mathfrak{E}\bar{\mathfrak{F}})$$
$$= P(\mathfrak{E}|\mathfrak{F})\,P(\mathfrak{F}) + P(\mathfrak{E}|\bar{\mathfrak{F}})\,P(\bar{\mathfrak{F}})$$

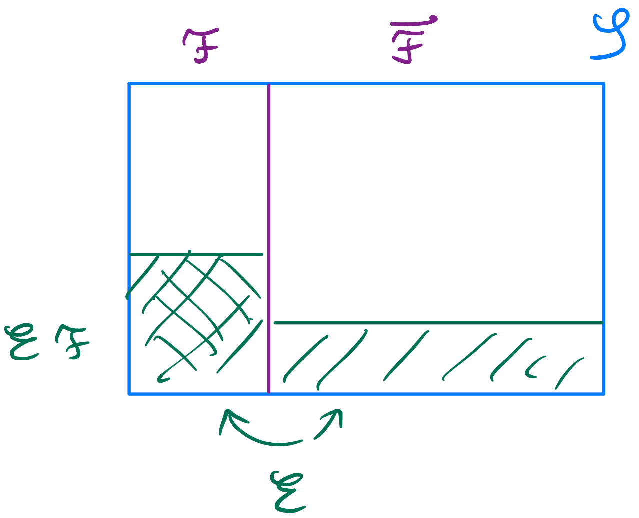
case analysis

Also: Berechne $P(\mathfrak{E})$ durch Fallunterscheidung nach $\mathfrak{F}$

Gesetz der totalen W.keit

Law of total prob.

## A-priori und A-posteriori Wahrscheinlichkeit




$P(\mathfrak{E})$ A-priori W.keit

prior (prob.) von $\mathfrak{E}$

$P(\mathfrak{E}|\mathfrak{F})$ A-posteriori W.keit

posterior (p.) von $\mathfrak{E}$

$$P(\mathfrak{E}) = P(\mathfrak{E}\mathfrak{F}) + P(\mathfrak{E}\bar{\mathfrak{F}})$$
$$= P(\mathfrak{E}|\mathfrak{F}) \cdot P(\mathfrak{F})$$
$$+ P(\mathfrak{E}|\bar{\mathfrak{F}}) \cdot P(\bar{\mathfrak{F}})$$

Bayes: $P(\mathfrak{F}|\mathfrak{E}) = \;?$

## Beispiel 15 Versicherungsgesellschaft (insurance company)

2 Arten von Kunden

| | | |
|---|---|---|
| Vorsichtige (prudent) | 70 % | $\mathcal{V}$ |
| Risikofreudige (risk takers) | 30 % | $\mathcal{R}$ |

Pro Jahr haben $\left\{ \begin{array}{l} 20\,\% \text{ der Vorsichtigen} \\ 40\,\% \text{ der Risikofreudigen} \end{array} \right\}$ einen Unfall $\mathcal{U}$

$P(\mathcal{U}) = ?$

$$P(\mathcal{U}) = P(\mathcal{U}|\mathcal{V})\,P(\mathcal{V}) + P(\mathcal{U}|\mathcal{R})\,P(\mathcal{R})$$

$$= 0{,}2 \times 0{,}7 + 0{,}4 \times 0{,}3$$

$$= 0{,}14 + 0{,}12 = 0{,}26$$

### Finde $P(\mathcal{U})$: Intuition

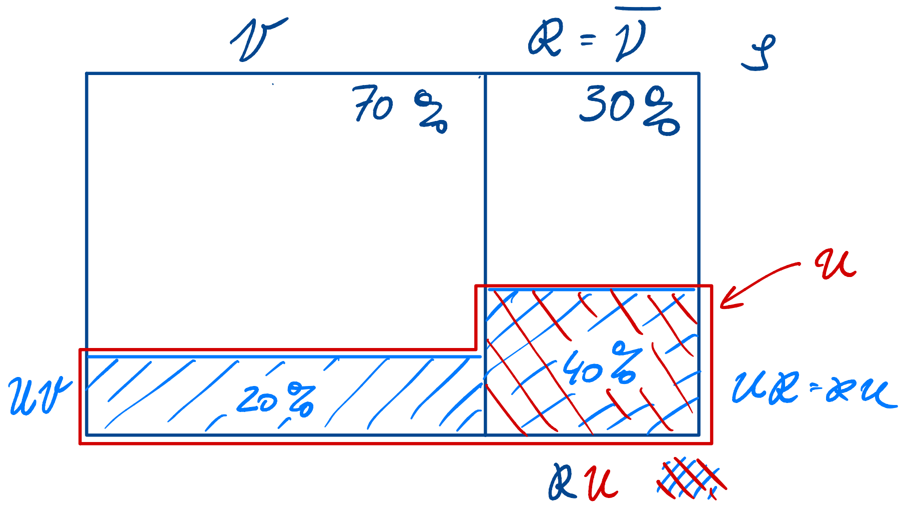
Gegeben:

$P(\mathcal{V})$ $(\Rightarrow P(\mathcal{R}))$

$P(\mathcal{U}|\mathcal{V})$

$P(\mathcal{U}|\mathcal{R}) = P(\mathcal{U}|\bar{\mathcal{V}})$

$\Longrightarrow P(\mathcal{U})$ ?




$$P(\mathcal{U}) = P(\mathcal{U}\mathcal{R}) + P(\mathcal{U}\mathcal{V})$$

$$= P(\mathcal{U}|\mathcal{R}) \cdot P(\mathcal{R}) + P(\mathcal{U}|\mathcal{V}) \cdot P(\mathcal{V})$$

$$= 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}7$$

$$= 0{,}12 + 0{,}14$$

$$= 0{,}26$$

# Aktualisierung von Einschätzungen

## Updating Beliefs

**Beispiel 16:** Ein Kunde hatte einen Unfall.

Was ist die W.keit, dass er risikofreudig war?

$$P(\mathcal{R} \mid \mathcal{U}) = ?$$

## Finde $P(\mathcal{R} \mid \mathcal{U})$: Intuition

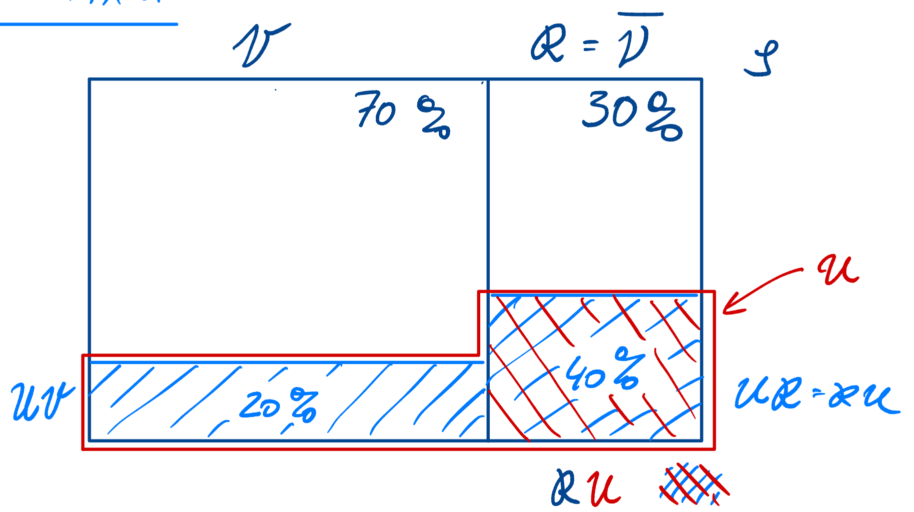
Gegeben:

$P(\mathcal{V})$ $\left(= P(\mathcal{R})\right)$

$P(\mathcal{U} \mid \mathcal{V})$

$P(\mathcal{U} \mid \mathcal{R}) = P(\mathcal{U} \mid \bar{\mathcal{V}})$

$\Rightarrow P(\mathcal{R} \mid \mathcal{U}) = ?$




$$P(\mathcal{R} \mid \mathcal{U}) = \frac{P(\mathcal{R}\mathcal{U})}{P(\mathcal{U})} = \frac{P(\mathcal{U}\mathcal{R})}{P(\mathcal{U}\mathcal{R}) + P(\mathcal{U}\mathcal{V})} = \frac{P(\mathcal{U} \mid \mathcal{R}) \cdot P(\mathcal{R})}{P(\mathcal{U} \mid \mathcal{R}) \cdot P(\mathcal{R}) + P(\mathcal{U} \mid \mathcal{V}) \cdot P(\mathcal{V})}$$

$$= \frac{0{,}4 \cdot 0{,}3}{0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}7} = \frac{0{,}12}{0{,}12 + 0{,}14}$$

$$= \frac{12}{12 + 14} = \frac{12}{26} = \frac{6}{13}$$

Aktualisierung von Einschätzungen
Updating Beliefs (Fortsetzung)

<u>Beispiel 16</u>: Ein Kunde hatte einen Unfall.
Was ist die W.keit, dass er risikofreudig war?

$$P(\mathcal{R} \mid \mathcal{U}) = \frac{P(\mathcal{R}\mathcal{U})}{P(\mathcal{U})} = \frac{P(\mathcal{U}\mathcal{R})}{P(\mathcal{U})}$$

$$= \frac{P(\mathcal{U} \mid \mathcal{R})\, P(\mathcal{R})}{P(\mathcal{U})}$$

$$= \frac{0{,}4 \times 0{,}3}{0{,}26} = \frac{0{,}12}{0{,}26} = \frac{12}{26} = \frac{6}{13}$$

$$= 0{,}46$$

## Anwendung: Medizinische Tests

$\mathcal{K}$ Patient hat die Krankheit

$\mathcal{T}$ Test auf Krankheit: Patient ist positiv

Studie:

$P(\mathcal{T} \mid \mathcal{K})$ Test mit Patienten, die $\mathcal{K}$ haben
Sensitivität / sensitivity

$P(\bar{\mathcal{T}} \mid \bar{\mathcal{K}})$ Test mit gesunden Testpersonen
Spezifizität / specificity liefert auch $P(\mathcal{T} \mid \bar{\mathcal{K}}) = 1 - P(\bar{\mathcal{T}} \mid \bar{\mathcal{K}})$

$P(\mathcal{K})$ Häufigkeit von $\mathcal{K}$
Prävalenz / prevalence

Frage:

$P(\mathcal{K} \mid \mathcal{T}) = ?$ Wie wahrscheinlich ist es, dass ein positives Patient krank ist?

# Quiz 9: Test auf Krankheit

$\mathcal{K}$ Person hat Krankheit

$\mathcal{T}$ Test ist positiv

W.keit für falsch positive Antworten

$$P(\mathcal{T} \mid \mathcal{K}) = \frac{99}{100} \qquad P(\mathcal{T} \mid \overline{\mathcal{K}}) = \frac{1}{100} \qquad P(\mathcal{K}) = \frac{1}{100}$$

Sensitivität 99%

Spezifität 99%

$$P(\mathcal{K} \mid \mathcal{T}) =$$

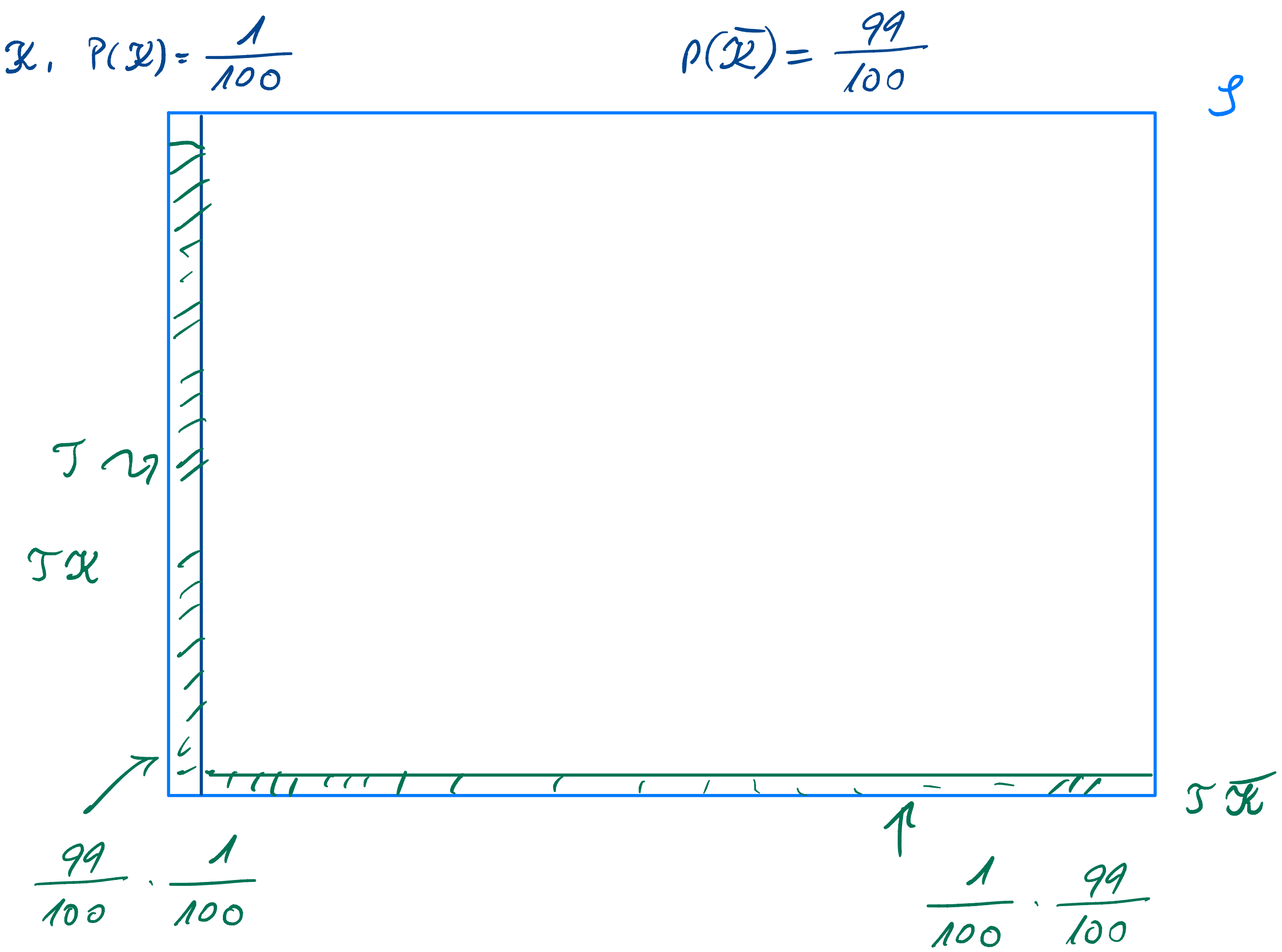
Avid-20 ist eine neue Krankheit. Für die Diagnose wurde ein neuer Test mit den folgenden Merkmalen entwickelt:

- Hat eine Person **Avid-20**, ist der Test positiv mit einer Wahrscheinlichkeit von **99 %**.
- Hat eine Person **nicht Avid-20**, ist der Test positiv mit einer Wahrscheinlichkeit von **1 %**.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass eine **Person** Avid-20 hat, beträgt **1 %**.

Wenn der Test positiv ist, wie hoch ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Person mit Avid-20 infiziert ist?

- ○ 99%
- ○ 50%
- ○ 20%
- ○ 1%


Test auf eine Krankheit
28 responses
Publish analytics
Wenn der Test positiv ist, wie hoch ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Person mit Avid-20 infiziert ist?
28 responses
14.3%
14.3%
67.9%
99%
50%
20%
1%


$\mathcal{X}$, $P(\mathcal{X}) = \frac{1}{100}$
$P(\overline{\mathcal{X}}) = \frac{99}{100}$
$S$
$T \cap$
$T\mathcal{X}$
$T\overline{\mathcal{X}}$
$\frac{99}{100} \cdot \frac{1}{100}$
$\frac{1}{100} \cdot \frac{99}{100}$

# Quiz 9: Test auf Krankheit (Fortsetzung)

$\mathcal{K}$ Person hat Krankheit

$\mathcal{T}$ Test ist positiv

$$P(\mathcal{T}\mid\mathcal{K}) = \frac{99}{100} \qquad P(\mathcal{T}\mid\overline{\mathcal{K}}) = \frac{1}{100} \qquad P(\mathcal{K}) = \frac{1}{100}$$

$$\boxed{\begin{aligned} P(\mathcal{K}\mid\mathcal{T}) &= \frac{P(\mathcal{T}\mid\mathcal{K})\cdot P(\mathcal{K})}{P(\mathcal{T})} = \frac{\frac{\cancel{99}}{\cancel{100}}\cdot\frac{1}{\cancel{100}}}{\frac{2\cdot\cancel{99}}{\cancel{100}\cdot\cancel{100}}} = \frac{1}{2} \\[2ex] P(\mathcal{T}) &= P(\mathcal{T}\mid\mathcal{K})\,P(\mathcal{K}) + P(\mathcal{T}\mid\overline{\mathcal{K}})\,P(\overline{\mathcal{K}}) \\ &= \frac{99}{100}\cdot\frac{1}{100} + \frac{1}{100}\cdot\frac{99}{100} = \frac{2\cdot 99}{100\cdot 100} \end{aligned}}$$

## Bayes'sche Formel

$\mathcal{E}$ Test, Zeuge, viele Großbuchstaben

$$P(\mathcal{F}\mid\mathcal{E}) = \frac{P(\mathcal{E}\mid\mathcal{F})\cdot P(\mathcal{F})}{P(\mathcal{E})}$$

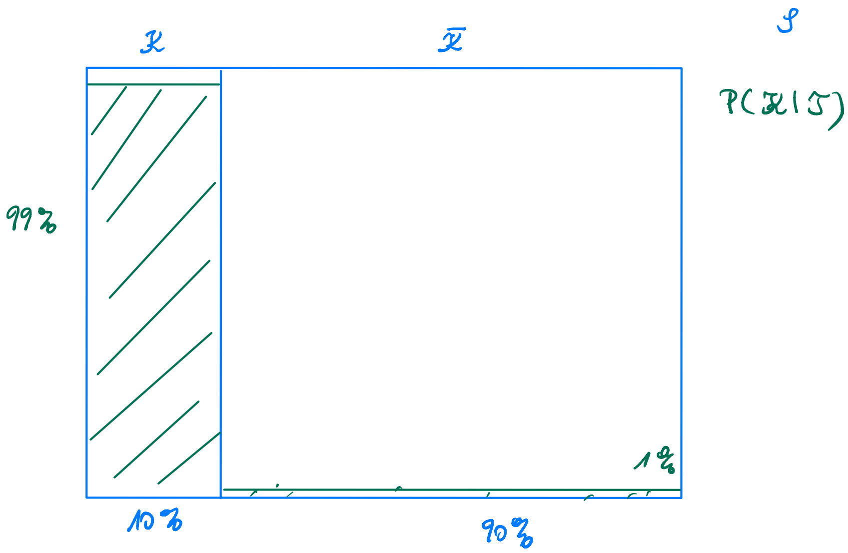
Beweis:

$$P(\mathcal{E}\mathcal{F}) = P(\mathcal{E}\mid\mathcal{F})\,P(\mathcal{F})$$

$$\overset{\shortparallel}{P(\mathcal{F}\mathcal{E})} = P(\mathcal{F}\mid\mathcal{E})\,P(\mathcal{E})$$

$\mathcal{F}$ Krankheit, Autofarbe, Spam

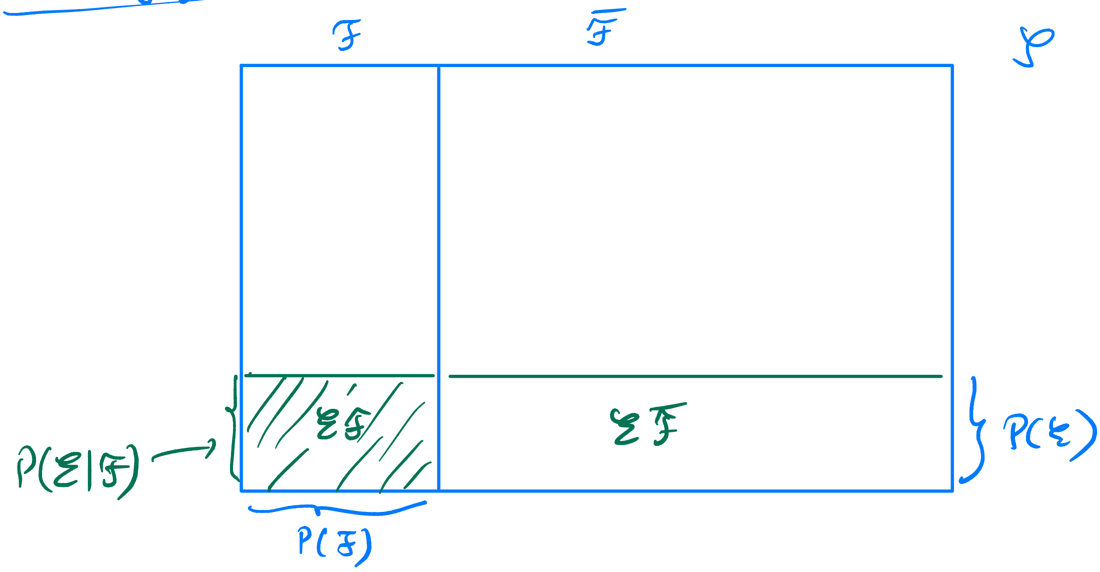
$$\Rightarrow\quad P(\mathcal{F}\mid\mathcal{E}) = \frac{P(\mathcal{E}\mid\mathcal{F})\,P(\mathcal{F})}{P(\mathcal{E})}$$




$$P(J) = P(J|K)\cdot P(K) + P(J|\bar{K})\cdot P(\bar{K})$$
$$= \frac{99}{100}\cdot\frac{10}{100} + \frac{1}{100}\cdot\frac{90}{100} = \frac{990+90}{100\cdot 100}$$

$$P(K|J) = \frac{P(J|K)\,P(K)}{P(J)} = \frac{\frac{99\cdot 1\cancel{0}}{\cancel{100\cdot 100}}}{\frac{99\cancel{0}+9\cancel{0}}{\cancel{100\cdot 100}}} = \frac{99}{108} = 92\,\%$$

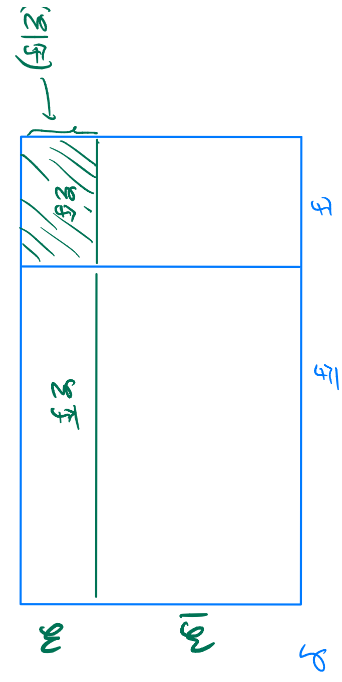
Unabhängigkeit




$$P(E) = P(E|F) \quad :\Longleftrightarrow \quad E, F \text{ unabh.}$$

$\Longleftrightarrow$ E, F̄ unabh.

## Unabhängigkeit



$P(E) = P(E \mid F) \quad :\Leftrightarrow \quad E, F$ unabh.

$\Leftrightarrow \quad E, \bar{F}$ unabh.

$\Leftrightarrow \quad \bar{E}, \bar{F}$ unabh. $\Leftrightarrow \quad F, E$ unabh. $= P(F) = P(F \mid E)$

## Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit (Law of Total Probability)

GTW — LOTP

Sei $F_1, \dots, F_n$ eine Partition von $S$, d.h.

- $F_i \cap F_j \neq \emptyset \quad , \quad i \neq j$
- $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = F_1 \cup \dots \cup F_n = S$

Also: $\sum_{i=1}^{n} P(F_i) = 1$

Sei $E \subseteq S$ ein Ereignis

$\Rightarrow E = \bigcup_{i=1}^{n} E F_i$

$\Rightarrow P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E F_i)$

$= \sum_{i=1}^{n} P(E \mid F_i) P(F_i)$

# Quiz Murmeln

GTW: Was sind $\mathcal{E}$ und die $\mathcal{F}_i$?

$\mathcal{E}$ = eine rote Murmel wird gezogen

$\mathcal{F}_i$ = der i-te Beutel wird gewählt

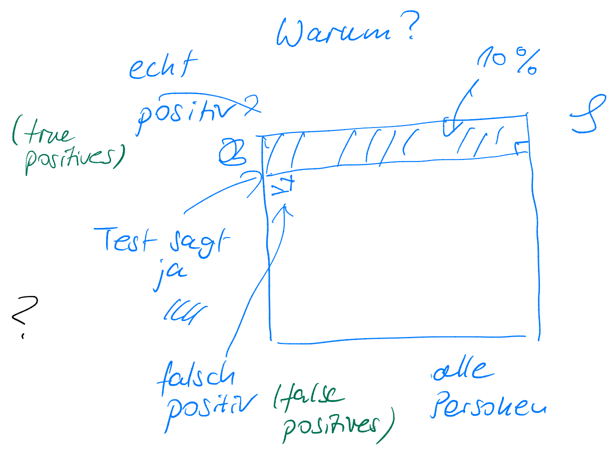
$$P(\mathcal{E}) = P(\mathcal{E}|\mathcal{F}_1)P(\mathcal{F}_1) + P(\mathcal{E}|\mathcal{F}_2)P(\mathcal{F}_2) + P(\mathcal{E}|\mathcal{F}_3)P(\mathcal{F}_3)$$

$$P(\mathcal{F}_i) = \frac{1}{3}, \quad i = 1,2,3$$

$$P(\mathcal{E}|\mathcal{F}_1) = \frac{80}{100}, \quad P(\mathcal{E}|\mathcal{F}_2) = \frac{55}{100}, \quad P(\mathcal{E}|\mathcal{F}_3) = \frac{45}{100},$$

$$\Rightarrow P(\mathcal{E}) = \frac{1}{3}\,\frac{80+55+45}{100} = \frac{1}{3}\,\frac{180}{100} = \frac{60}{100}$$

# Quiz 10: Bivid-Diagnose




$\mathcal{B}$ Person hat Bivid

$\mathcal{T}$ Test positiv

Frage: $P(\mathcal{B}|\mathcal{T}) = ?$

$$P(\mathcal{T}|\mathcal{B}) = \frac{99}{100}$$

$$P(\bar{\mathcal{T}}|\bar{\mathcal{B}}) = \frac{99}{100} \Rightarrow P(\mathcal{T}|\bar{\mathcal{B}}) = \frac{1}{100}$$

$$P(\mathcal{B}) = \frac{10}{100}$$

$$P(\mathcal{B}|\mathcal{T}) = \frac{P(\mathcal{T}|\mathcal{B})\,P(\mathcal{B})}{P(\mathcal{T})} = \frac{\frac{99}{\cancel{100}}\cdot\frac{\cancel{10}}{\cancel{100}}}{\frac{99}{\cancel{100}}\,\frac{\cancel{10}}{100} + \frac{1}{\cancel{100}}\cdot\frac{\overset{?}{\cancel{90}}}{\cancel{100}}}$$

$$P(\mathcal{T}) = P(\mathcal{T}|\mathcal{B})P(\mathcal{B}) + P(\mathcal{T}|\bar{\mathcal{B}})\cdot P(\bar{\mathcal{B}})$$

$$= \frac{99}{99+9} = \frac{99}{108} = 91.67 \approx 92$$

## 1.6 Unabhängige Ereignisse

Beispiel: Standard-Kartenspiel mit 52 Karten

$E$ = ziehe eine rote Karte

$F$ = ziehe ein Ass

$P(F) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

$P(F|E) = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}$

2 rote Asse
26 rote Karten

$P(E) = \frac{1}{2}$   $P(F) = \frac{1}{13}$

Intuition: Wissen wir $F$, sagt uns das nichts über $E$:
$E$ und $F$ sind unabhängig

Allgemein   $P(E|F) \neq P(E)$

A-priori-W.keit von $E$ (prior prob.)

A-posteriori-W.keit von $E$ (posterior prob.)

**Definition:** $E$ und $F$ sind unabhängig $\iff P(E|F) = P(E)$

Notiz: Die Definition ist symmetrisch

$$P(E|F) = P(E) \iff P(E) = \frac{P(EF)}{P(F)}$$

$$\iff P(E)\,P(F) = P(EF)$$

Für $P(E|F)$ nehmen wir an, dass $P(F) \neq \emptyset$ ist

Alternative Definition:

iff (if and only if)

genau dann wenn

$E, F$ unabhängig gdw $P(EF) = P(E)P(F)$

$P(E)P(F) = P(EF) \Rightarrow$

$$\Rightarrow P(F) = \frac{P(EF)}{P(E)} = \frac{P(FE)}{P(E)} = P(F|E)$$

falls $P(E) \neq \emptyset$

# Quiz: Unabhängige Ereignisse beim Würfeln

$\mathcal{E}$ = "$D_1 + D_2 = 7$"
$\mathcal{F}$ = "$D_1 + D_2 = 8$"
$\mathcal{G}$ = "$D_1 = 3$"

$\mathcal{F}: \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$
$\Rightarrow \#\mathcal{F} = 5$

$\mathcal{G} = \{(3,1),\dots,(3,6)\}$
$\Rightarrow \#\mathcal{G} = 6$

$\mathcal{E}$ unabh. $\mathcal{F}$: $P(\mathcal{E}\mathcal{F}) = 0 \neq \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{36} = P(\mathcal{E})P(\mathcal{F})$ Nein

$\mathcal{E}$ unabh. $\mathcal{G}$: $P(\mathcal{E}\mathcal{G}) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = P(\mathcal{E})P(\mathcal{G})$ Ja

$\mathcal{F}$ unabh. $\mathcal{G}$: $P(\mathcal{F}\mathcal{G}) = \frac{1}{36} \neq \frac{5}{36}\cdot\frac{1}{6} = P(\mathcal{F})P(\mathcal{G})$ Nein

$P(\mathcal{E}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(\mathcal{F}) = \frac{5}{36}$

$P(\mathcal{G}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(\mathcal{E}\mathcal{F}) = 0$

$P(\mathcal{E}\mathcal{G}) = \frac{1}{36}$

$P(\mathcal{F}\mathcal{G}) = \frac{1}{36}$

## Beispiel: Kartenspiel

$\mathcal{E}$ = zieh eine rote Karte
$\mathcal{F}$ = zieh ein Ass

$P(\mathcal{E}) = \frac{1}{2}$, $P(\mathcal{E}|\mathcal{F}) = \frac{1}{2}$

$P(\mathcal{F}) = \frac{1}{13}$, $P(\mathcal{F}|\mathcal{E}) = \frac{1}{13}$

$P(\mathcal{E}\mathcal{F}) = \frac{1}{26}$

Wir beobachten auch:

$P(\bar{\mathcal{E}}|\mathcal{F}) = \frac{1}{2}$

$P(\bar{\mathcal{F}}|\mathcal{E}) = \frac{12}{13}$

$P(\bar{\mathcal{E}}) = \frac{1}{2}$

$P(\bar{\mathcal{F}}) = \frac{12}{13}$

Symmetrie:

$$\boxed{P(\mathcal{E}\mathcal{F}) = P(\mathcal{E})P(\mathcal{F})}$$

Definition: Unabhängigkeit von Ereignissen

$$\Leftrightarrow P(\mathcal{E}|\mathcal{F}) = P(\mathcal{E})$$
$$\Leftrightarrow P(\mathcal{F}|\mathcal{E}) = P(\mathcal{F})$$

if $P(\mathcal{E}) \neq 0 \neq P(\mathcal{F})$

**Satz 20** $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ unabhängig $\Rightarrow$ $\mathcal{E}, \bar{\mathcal{F}}$ unabhängig

Beweis: Zeige $P(\mathcal{E}\bar{\mathcal{F}}) = P(\mathcal{E})P(\bar{\mathcal{F}})$

$$P(\mathcal{E}) = P(\mathcal{E}\mathcal{F} \cup \mathcal{E}\bar{\mathcal{F}}) = P(\mathcal{E}\mathcal{F}) + P(\mathcal{E}\bar{\mathcal{F}})$$

$$= P(\mathcal{E})P(\mathcal{F}) + P(\mathcal{E}\bar{\mathcal{F}})$$

$$\Rightarrow \quad P(\mathcal{E}) - P(\mathcal{E})P(\mathcal{F}) = P(\mathcal{E}\bar{\mathcal{F}})$$

$$\parallel$$

$$P(\mathcal{E})(1 - P(\mathcal{F})) = P(\mathcal{E}) \cdot P(\bar{\mathcal{F}})$$

Folgerung: $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ unabh $\Rightarrow$ $\bar{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{F}}$ unabh.

D.h. Unabhängigkeit vererbt sich auf Komplemente

Sei $\mathcal{E}$ unabh. von $\mathcal{F}$, $\mathcal{E}$ unabh von $\mathcal{G}$. Folgt dann $\mathcal{E}$ unabh. von $\mathcal{F}\mathcal{G}$?

Beispiel: Zwei Würfel!

$\mathcal{E}$ = "$w_1 + w_2 = 7$" $\qquad$ $\mathcal{F}$ = "$w_1 = 1$" $\qquad$ $\mathcal{G}$ = "$w_2 = 6$"

$P(\mathcal{E}) = \frac{1}{6}$, $\qquad$ $P(\mathcal{F}) = \frac{1}{6}$, $\qquad$ $P(\mathcal{G}) = \frac{1}{6}$

$P(\mathcal{E}\mathcal{F}) = \frac{1}{36}$ $\qquad$ $P(\mathcal{E}\mathcal{G}) = \frac{1}{36}$ $\qquad$ $P(\mathcal{F}\mathcal{G}) = \frac{1}{36}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ unabh. $\qquad$ $\Rightarrow$ $\mathcal{E}, \mathcal{G}$ unabh.

Was ist mit der Unabhängigkeit von $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}\mathcal{G}$?

Vergleiche $P(\mathcal{E}(\mathcal{F}\mathcal{G}))$ und $P(\mathcal{E}) \cdot P(\mathcal{F}\mathcal{G})$!

$$P(\mathcal{E}(\mathcal{F}\mathcal{G})) = P(\mathcal{E}\mathcal{F}\mathcal{G}) = \frac{1}{36}$$

$$P(\mathcal{E})P(\mathcal{F}\mathcal{G}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{36} \neq$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}\mathcal{G}$ sind <u>nicht</u> unabh.

**Definition 22:** $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ sind unabhängig, wenn

- $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ und $\mathcal{E}, \mathcal{G}$ und $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sind paarweise unabhängig
- $P(\mathcal{E}\mathcal{F}\mathcal{G}) = P(\mathcal{E})P(\mathcal{F})P(\mathcal{G})$

Konsequenz: $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ unabh. $\Rightarrow$ $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}\mathcal{G}$ unabh.

Beweis: $P(\mathcal{E}(\mathcal{F}\mathcal{G})) = P(\mathcal{E}\mathcal{F}\mathcal{G}) = P(\mathcal{E})P(\mathcal{F})P(\mathcal{G})$

$$\underset{\mathcal{F},\mathcal{G}\text{ unabh.}}{=} P(\mathcal{E})P(\mathcal{F}\mathcal{G})$$

Bemerkung: $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ unabh. $\Rightarrow$ $\mathcal{E}$ und $(\mathcal{F}\cup\mathcal{G})$ unabh.

Beweis: Zeige $P(\mathcal{E}(\mathcal{F}\cup\mathcal{G})) = P(\mathcal{E})P(\mathcal{F}\cup\mathcal{G})$

$$\begin{aligned}
P(\mathcal{E}(\mathcal{F}\cup\mathcal{G})) &= P(\mathcal{E}\mathcal{F}\cup\mathcal{E}\mathcal{G}) \\
&= P(\mathcal{E}\mathcal{F}) + P(\mathcal{E}\mathcal{G}) - \underbrace{P(\mathcal{E}\mathcal{F}\mathcal{G})}_{= P(\mathcal{F}\mathcal{G})} \\
&= P(\mathcal{E})P(\mathcal{F}) + P(\mathcal{E})P(\mathcal{G}) - P(\mathcal{E})P(\mathcal{F})P(\mathcal{G}) \\
&= P(\mathcal{E})(P(\mathcal{F}) + P(\mathcal{G}) - P(\mathcal{F}\mathcal{G})) \\
&= P(\mathcal{E})P(\mathcal{F}\cup\mathcal{G})
\end{aligned}$$

**Allgemeine Definition**

$\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ unabhängig $\Longleftrightarrow$

für jede Teilmenge $\{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m\} \subseteq \{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n\}$ gilt:

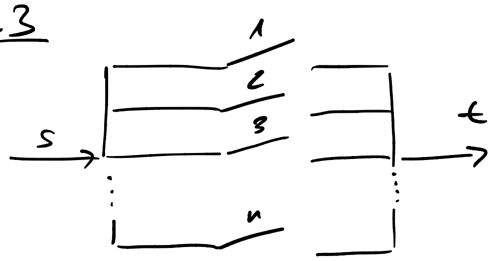
$$P(\mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2 \cdots \mathcal{F}_m) = P(\mathcal{F}_1) P(\mathcal{F}_2) \cdots P(\mathcal{F}_m)$$

Beispiele:

- Folgen von Experimenten; $\mathcal{E}_i$ ist die i-te Durchführung des Experiments
  Etwa: Werfen von Würfeln

- Folgen von Tests auf eine Krankheit: mehrfache Tests mit verschiedenen Sets zu verschiedenen Zeiten

Beispiel 23




- Komponenten sind unabhängig
- funktionieren mit Wkeit $p_i$

System funktioniert wenn $\geq 1$ Komponenten funktionieren

$\mathcal{E}$ = "System funkt."   $\mathcal{F}_i$ = "Komp. i funkt."

$\Rightarrow P(\mathcal{E}) = ?$

$\overline{\mathcal{E}}$ = "System funktioniert nicht" $\Leftrightarrow$ keine Komp. funkt.

$$\overline{\mathcal{E}} \equiv \overline{\mathcal{F}_1}\, \overline{\mathcal{F}_2} \cdots \overline{\mathcal{F}_n}$$

Klar: $\mathcal{F}_i$ unabh. $\Rightarrow$ $\overline{\mathcal{F}_i}$ unabh.

$$P(\mathcal{E}) = 1 - P(\overline{\mathcal{E}}) = 1 - P(\overline{\mathcal{F}_1} \cdots \overline{\mathcal{F}_n}) = 1 - P(\overline{\mathcal{F}_1}) \cdots P(\overline{\mathcal{F}_n})$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{\mathcal{F}_i}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P(\mathcal{F}_i)) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i)$$