Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

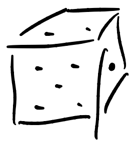
Kapitel 1: Einführung in die W.theorie

1. Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

W.theorie gibt uns

- Konzepte um über Unsicherheit zu sprechen
  (Glücksspiele, wiederkehrende variierende Ereignisse, z.B. Messungen, Kugeln auf dem Galtonbrett)
- Methoden, um Unsicherheiten zu quantifizieren

Beispiel: Würfeln mit Würfel W



Was ist $P(W=4) = \frac{1}{6}$ "ein Sechstel", "eins durch sechs"

sixth

probability

$$P(W \geq 4) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(W < 4) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Bedeutung:

1) Bei vielen Wiederholungen ist $\frac{1}{6}$ der Ergebnisse $= 4$

2) Es gibt die Möglichkeit von 1 aus 6, dass 4 oben liegt

frequentistische

subjektive (Bayessche)

Sichtweise (view)

Keine Konsequenz für die Mathematik

1.1 Ereignisse (Events)

Bei einem Experiment

S Stichprobenraum (sample space) = Menge der möglichen Ergebnisse (outcomes)

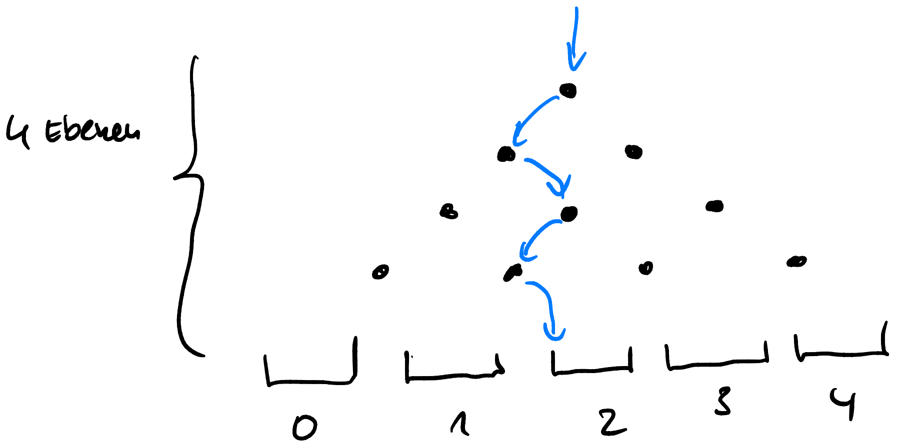
sample

Beispiele

- Werfen eines Würfels: $S = \{1, 2, 3, \ldots, 6\}$ $\#S = 6$
- Werfen von 2 Würfeln:

$$S = \{ (1,1), (1,2), \ldots, (1,6), \\ (2,1), \ldots \\ \vdots \\ (6,1), \ldots\ldots, (6,6) \} \qquad \#S = 36$$

Galtonbrett



# Wege nach	Fach
1	0
4	1
6	2
4	3
1	4

$0 \dots n$

$S = \{0, \dots, n\}$

$\# S = n+1$

Ergebnisse

$S = \{0, \dots, 4\}$

2 aus 4

12 23
13 24
14 34

S kann auch unendlich sein!

- Messen von Entfernungen : alle $m > 0$
- Messen von Menschen : alle $m \in [0{,}5 ; 3{,}0]$ sind mögliche Ergebnisse

- # Würfe mit Würfel bis zur ersten 6 ,

$\{1, 2, \dots, 783, \dots, \infty\}$

Ereignisse (events)

- Wurf einer geraden Zahl $\mathcal{E}_{gerade} = \{2, 4, 6\}$
- Wurf von zwei gleichen Zahlen

$$\mathcal{E}_{gleich} = \{(1,1), (2,2), \dots, (6,6)\}$$

Allgemein: $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$ Ereignisse sind Mengen von Ergebnissen

$\mathcal{E}$ tritt ein (happens, occurs) wenn Ergebnis $\in \mathcal{E}$

Mengenoperationen auf Ereignissen

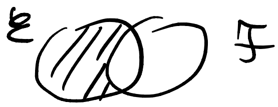
$\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ Vereinigung (union) („oder", "or")

$\mathcal{E} \cap \mathcal{F}$, $\mathcal{E}\mathcal{F}$ Durchschnitt (intersection) („und")

$\mathcal{E}$ geschnitten $\mathcal{F}$

$\mathcal{E} \setminus \mathcal{F}$ Differenz (difference) („und nicht")

„$\mathcal{E}$ ohne $\mathcal{F}$"



$\overline{\mathcal{E}}$ Komplement (complement) („nicht")

$\mathcal{E}$ quer $\mathcal{E}$ bar

$$\mathcal{E} \setminus \mathcal{F} = \mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{F}} = \mathcal{E}\overline{\mathcal{F}}$$

$$\overline{\mathcal{E}} = \mathcal{S} \setminus \mathcal{E}$$

Beispiele (Würfeln)

$$\mathcal{E}_{prim} = \{2,3,5\}$$

$$\mathcal{E}_{gerade} \cup \mathcal{E}_{prim} = \{2,3,4,5,6\}$$

$$\mathcal{E}_{gerade} \cap \mathcal{E}_{prim} = \{2\}$$

$$\overline{\mathcal{E}_{prim}} = \{1,4,6\}$$

Spezialfall: $\emptyset \subseteq \mathcal{S}$ ist das unmögliche (impossible) Ereignis oder leere (empty) E.

$\mathcal{E} \cap \mathcal{F} = \emptyset \Rightarrow \mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ sind "disjunkt" (disjoint)

Eigenschaften der Operationen

$$\overline{\mathcal{S}} = \emptyset \quad , \quad \overline{\emptyset} = \mathcal{S}$$

$$\overline{\overline{\mathcal{E}}} = \mathcal{E}$$

$$\overline{\mathcal{E} \cup \mathcal{F}} = \overline{\mathcal{E}} \cap \overline{\mathcal{F}}$$

$$\overline{\mathcal{E} \cap \mathcal{F}} = \overline{\mathcal{E}} \cup \overline{\mathcal{F}}$$

De Morgansche Regeln

Äquivalenz

$$\mathcal{E} \equiv \mathcal{F} \iff \mathcal{E} \subseteq \mathcal{F} \text{ und } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$$

1.2 Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie

$\mathcal{S}$ gegeben, $P(\mathcal{E})$ sei eine reelle Zahl für jedes $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$

A1: $0 \leq P(\mathcal{E}) \leq 1$

A2: $P(\mathcal{S}) = 1$

A3: Wenn $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots$ paarweise disjunkt sind, ($\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_j = \emptyset$ für $i \neq j$)

dann ist

$$P(\mathcal{E}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{E}_n) = P(\mathcal{E}_1) + \cdots + P(\mathcal{E}_n) = \sum_{i=1}^{n} P(\mathcal{E}_i)$$

Auch: $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\mathcal{E}_i)$

$P(\emptyset) =$

$\mathcal{S} \cap \emptyset = \emptyset$ ($\mathcal{S}, \emptyset$ disjunkt)

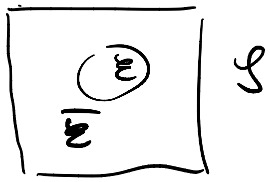
$\Rightarrow P(\mathcal{S}) = P(\mathcal{S} \cup \emptyset) = P(\mathcal{S}) + P(\emptyset)$

$\Rightarrow 0 = P(\emptyset)$

Satz 1 (Proposition 1): $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

Beweis (proof):

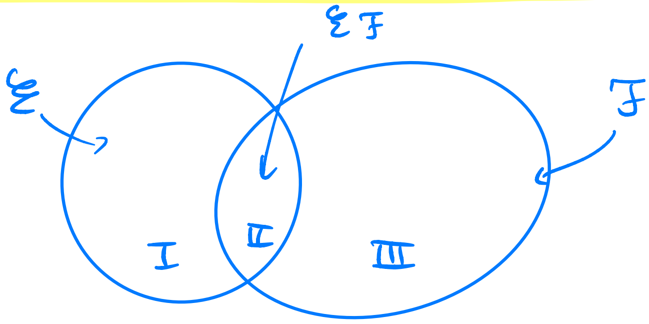
$$E \cap \bar{E} = \emptyset \qquad E \cup \bar{E} = S$$



$$\overset{Ax\,3}{\Rightarrow} \quad P(E) + P(\bar{E}) = P(E \cup \bar{E})$$
$$= P(S) \overset{Ax\,2}{=} 1$$

$$\Rightarrow \quad P(\bar{E}) = 1 - P(E) \qquad \square$$

Satz 2: $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$



$I = E \setminus F$

$II = EF$

$III = F \setminus E$

$$P(E \cup F) = P(I \cup II \cup III)$$
$$= P(I) + P(II) + P(III) \qquad Ax\,3$$
$$P(E) = P(I \cup II) = P(I) + P(II) \qquad Ax\,3$$
$$P(F) = P(II \cup III) = P(II) + P(III) \qquad Ax\,3$$

$$\Rightarrow \quad P(E \cup F) = P(I) + P(II) + P(III)$$
$$P(E) + P(F) = P(I) + P(II) + P(II) + P(III)$$
$$P(II) = P(EF)$$

Quiz

Trinker

$\mathcal{B}$ Biertr. $\qquad W$ Weintr.

$$P(\overline{\mathcal{B} \cup W}) = 1 - P(\mathcal{B} \cup W) = 1 - 0{,}82 = 0{,}18$$

$$P(\mathcal{B} \cup W) = P(W) + P(\mathcal{B}) - P(\mathcal{B}W)$$

$$= 0{,}49 + \underbrace{0{,}68 - 0{,}35}_{0{,}33}$$

$$= 0{,}49 + 0{,}33 = 0{,}82$$